

Tornádómodell kísérleti vizsgálata

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Halász Gábor

ELTE TTK Fizika BSc, 1. évfolyam

Témavezetők:

Dr. Jánosi Imre, ELTE TTK, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék,
egyetemi docens

Dr. Szabó Gábor, MTA-ELTE Elméleti Fizika Tanszéki Kutatócsoport,
tudományos főmunkatárs

Dr. Tél Tamás, ELTE TTK, Elméleti Fizika Tanszék,
egyetemi tanár

2006.

Kivonat

Számtalan helyen találkozhatunk örvényekkel, a kádlefolyó-tölcsértől kezdve a hatalmas tornádóig.

A kémiai laboratóriumokban rendszeresen használt mágneses keverő például megfelelő fordulatszám esetén alkalmas örvény-keltésre. Az edény közepén kialakuló erős örvényleg főbb jele, hogy a vízszint a forgás hatására „behorpad”, a lefolyó-tölcsérré emlékeztető alakzat jön létre. Ezt a tölcser megfestve egy igen stabil festékfüggöny rajzolódik ki az örvénymag körül, ami a tornádókra emlékeztet.

A TDK dolgozatom célja az edényben létrejövő áramlás minél részletesebb kísérleti leírása. Ennek érdekében stroboszkópos megfigyelést, és festékek/gyöngyökkel történő nyomkövetést alkalmaztam (videó-kamera segítségével). PIV-es felvételeket is készítettem, melyekből egyes sebesség-komponensek közvetlenül megállapíthatóak. A kiértékelésből látszik, hogy a körkörös áramlás egy örvénymagon kívül ideális örvénynek felel meg. A mag közepén kialakul egy erős leáramlás (jet), itt a víznél könnyebb gyöngyök stabil egyensúlyi állapotba kerülnek. A már említett festékfüggöny ezen örvénymag határát jelzi.

A tölcser magasságát és szélességét különböző keverőfejek különböző szögsebességei mellett vizsgáltam, változtatva közben az edény szélességét és a vízmagasságot is. Meglepő, hogy ezt a függést (a mérhető tartományban) viszonylag egyszerű függvények is igen jó közelítéssel írják le. A tölcser magassága például a keverőfej szögsebességének négyzetével arányos.

Bevezetés

A természetben zajló áramlások minél pontosabb megértése fontos feladat a fizikusok és meteorológusok számára. A különböző áramlások közt is rendkívüli jelentőséggel bírnak a lokalizált örvények, gondoljunk csak a városokat feldúló tornádókra. Megértésükhöz a kísérletezésen át vezet az út, laboratóriumi körülmények között is tanulmányoznunk kell a lokalizált örvények viselkedését.

Erre szolgálnak az általam elvégzett kísérletek is; az örvényt egy – a vegyészek közt széles körben elterjedt – mágneses keverő segítségével hoztam létre. Az edény közepén kialakuló erős örvénylés legfőbb jele a vízfelszín „behorpadásával” létrejövő jellegzetes alakú víztölcsér. Az így kapott rendszer sok tekintetben mutat hasonlóságot a tornádókkal, így tekinthető azok kísérleti modelljének.

A kutatásom célja tehát az előbb leírt tornádómodell minél pontosabb kísérleti vizsgálata, különös tekintettel a kialakuló áramlási tér szerkezetére. Utóbbi legközvetlenebbül egy modern mérési módszer, a PIV eljárás segítségével térképezhető fel, de kvalitatív szinten fontos szerepet játszanak a gyöngyökkel és festékkel történő nyomkövetések is. Komoly figyelmet fordítottam az örvény legszembevetőbb jelére, a tölcsérre; ennek magasságát és szélességét a különböző paraméterek függvényében mértem. A keverés erőssége mellett a vízmagasságot is változtattam, sőt, különböző edényeket és keverőfejeket használtam, így növelve a kapott eredmények „univerzalitását”. Méréseimet az ELTE TTK Kármán Laboratóriumában végeztem, mely kifejezetten a környezeti áramlások kísérleti modellezésére specializálódott. Vizsgálataim alapján sikerült meghatároznom az áramlási teret, és egyszerű összefüggéseket találnom a tölcsér méretei és a rendszert jellemző többi paraméter között.

Dolgozatom I. fejezetében a természetben előforduló lokalizált örvényeket vizsgálom két konkrét jelenség, a lefolyótölcsér és a tornádó példáján. Ezt követi a legegyszerűbb elemi örvénymodellek leírása (II. fejezet), majd a kísérleti elrendezés általános bemutatása, a rendszer legfontosabb paramétereinek definiálásával (III. fejezet). Az előbb felsorolt mérési módszereket a IV. fejezetben részletezem, míg az alkalmazásukkal nyert eredményeket az V. fejezetben fejtem ki. A VI. fejezetben összefüggéseket állítok fel a tölcsér méretei és az egyéb paraméterek között, majd a II. fejezetben megadott Burgers-örvényt alkalmazom a rendszerre. A VII. fejezetben a tornádóval való analógiát vizsgálom, kitérve a hasonlóságokra és különbségekre. A dolgozatot egy összefoglalás zárja (VIII. fejezet), ezt követi az irodalomjegyzék és a függelék.

Tartalomjegyzék

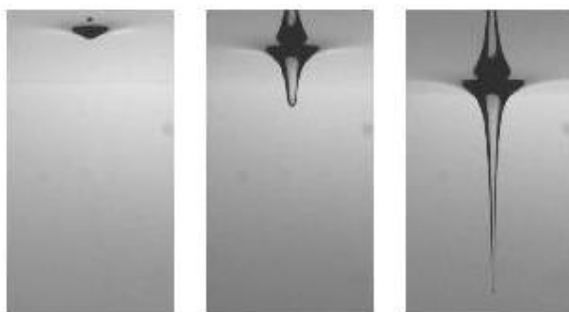
I. Természeti örvények	4
II. Örvénymodellek.....	6
1. Ideális örvény	6
2. Rankine-örvény.....	6
3. Burgers-örvény	7
III. A mérési elrendezés	8
IV. Mérési módszerek.....	9
1. Szögsebesség mérése stroboszkóppal	9
2. A tölcser paramétereinek leolvasása	10
3. Gyöngyökkel történő nyomkövetés	11
4. Festékekkel történő nyomkövetés	11
5. Sebességtér felvétele PIV eljárással	12
V. Mérési eredmények.....	13
1. A tölcser paramétereinek értékei	13
2. A PIV felvételek értékelése.....	15
3. Gyöngyökkel történő nyomkövetés	20
4. Festékekkel történő nyomkövetés	21
VI. Kvantitatív összefüggések.....	24
1. A tölcser magasságának függvénye	24
2. A tölcser félszélességének függvénye	27
3. A Burgers-örvénytmodell alkalmazása.....	29
VII. Konklúzió.....	32
VIII. Összefoglalás	34
Irodalomjegyzék	35
Köszönetnyilvánítás.....	35
Függelék.....	36
1. A félszélesség meghatározása méréssel	36
2. Az „anti-centrifugális erő” levezetése.....	37
3. A gyöngyök egyensúlyának stabilitása	38

I. Természeti örvények

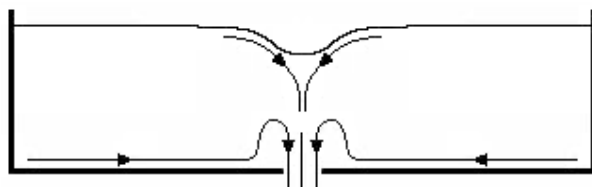
A természeti áramlásokat vizsgálva számtalan helyen láthatunk örvényeket. Ebben a dolgozatban csak ezek egy csoportjával, a lokalizált örvényekkel foglalkozom, ekkor az áramló közeg lényegében egy jól meghatározott tengely körül örvénylik. Az alapvetően hengersizmetrikus áramlásra természetesen egyéb mozgások is ráakódhatnak, kisebb másodlagos örvények is létrejöhetnek (ld. IV/5. pont, V/4. pont), az áramlás jellegét azonban mindig a központi örvénylés határozza meg. A lokalizált örvények csoportja elég változatos, alakjukban és méretükben széles skálán változó jelenségek tartoznak ide [1-3]. Az alábbiakban ezek két jól ismert képviselőjét mutatom be, a fürdőkáád leengedésekor létrejövő lefolyótölcsért és a házakat romba döntő hatalmas tornádót.

A fürdőkáád leengedése esetén tulajdonképpen egy kis lyukat hozunk létre a kád alján, melyen keresztül a víz elkezd kifolyni. A kontinuitás miatt kialakul egy beáramlás, ami a középről lefolyó vízmennyiséget pótolja. A káádban levő víznek viszont kezdetben volt valamekkora impulzusnyomatéka, az egyes részecskék a lyuk feletti tengelyhez képest érintőirányú sebességgel is rendelkeztek. Akármilyen kicsi is ez a sebesség, az impulzusnyomaték megmaradása miatt a tengelyhez közeledve megnövekszik, létrehozva a lyuk feletti örvénylést. Maga a lefolyótölcsér ennek egyenes következménye, az örvényben kialakuló kisebb nyomás miatt a víz felszíne „behorpad”. A belső súrlódás és egyéb veszteségek során elvesző energiát a víz helyzetienergia-csökkenése pótolja.

Az előbbiekből kiderül, hogy a lefolyótölcsér tulajdonságait jelentősen befolyásolja a víz eredő impulzusnyomatéka. A laboratóriumi kísérletekben ezt az edény forgatásával szabályozzák [4]. Az 1. ábrán látható képek az edény eltérő szögsebességei mellett készültek; a lefolyótölcsérek közti különbségek nem szorulnak magyarázatra.



1. ábra: Lefolyótölcsérek a tárolóedény különböző (balról jobbra növekvő) szögsebességei mellett [4]



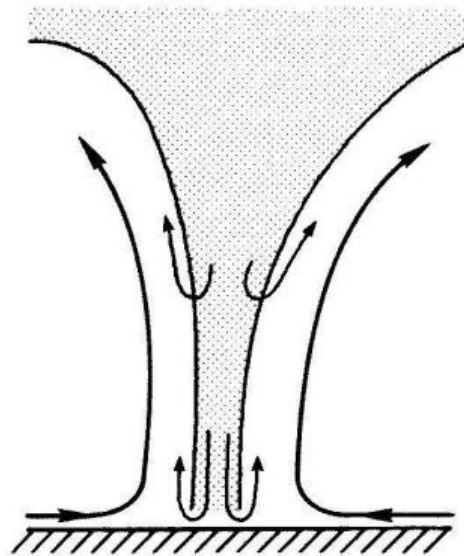
2. ábra: A forgatott edényben kialakuló áramlási kép vázlata [4] – erre rakódik rá a körkörös örvénylés

Ha a lyuk mérete elég kicsi, akkor a vízszint csak lassan süllyed, és egy meglehetősen stacionárius áramlás jön létre. Ennek vázlata a 2. ábrán látható; a vártak megfelelően mindenhol befelé áramlik a víz. Érdekes viszont, hogy közvetlenül a lyuk mellett egy feláramlási zóna is kialakul, az edény forgatásának következményeképpen [4].

A pusztító erejű tornádók kialakulásának pontos mechanizmusa még tisztázatlan, de biztosan fontos szerepet játszik az eltérő sebességű légrétegek között fellépő szélnyírás és a különböző hőmérsékletű légtömegek keveredésekor létrejövő hőmérséklet-gradiens. A kész tornádó már önfenntartó; hatalmas hőerőgépként működik, és óriási pusztítást végez, amerre csak jár. A 3. ábrán látható tornádó 1997 májusában söpört végig Texas államon.



3. ábra: Tornádó Texas állam felett, 1997
(<http://www.livescience.com/tornadoes>)



4. ábra: Függőleges és sugárirányú áramlás egy tornádóban [2]

A 4. ábra a tornádók áramlási képeinek vázlatát mutatja. A középső csőben erős leáramlás történik, körülötte viszont felfelé áramlik a levegő [2]. A két zóna határán létrejön egy „semleges” réteg, ahol a függőleges sebességkomponens elég kicsi; ezt rajzolja ki a jellegzetes tölcsér, mely a tornádók legfeltűnőbb látható jele (3. ábra). A tölcsér a felhő anyagából és a feláramlás által felkapott porból, törmelékből áll. Ha egy tornádó az óceán felett alakul ki, hatalmas víztölcsér jön létre, melyet angolul „waterspout”-nak neveznek. A tornádókkal rokon jelenségek még a trópusi ciklonok (tájfúvók és hurrikánok), ezeknél a jóval nagyobb átmérő miatt a Föld forgásából származó Coriolis-erő is szerepet kap.

Nagy jelentőségük miatt a tornádók működésének megértése fontos feladat, laboratóriumi modellezésük azonban rendkívüli bonyolultságuk miatt igen nehéz. Az általam választott elrendezés egy lehetséges modell; dolgozatom további fejezetei ezzel foglalkoznak. A tornádóval való összehasonlításra a konklúzióban (VII. fejezet) térek vissza.

II. Örvénymodellek

Az előző fejezetben bemutatott örvények rendkívül bonyolultak, pontos matematikai leírásuk ezért nehéz. Bizonyos vonásaikat azonban megérthetjük, ha megpróbáljuk őket különböző egyszerűbb modellekkel közelíteni. Ebben a fejezetben a legismertebb elemi örvénymodelleket írom le [1-3], a legegyszerűbbtől a bonyolultabbak felé haladva.

1. Ideális örvény

Az ideális örvényben az egyes folyadékrezecskék egy meghatározott tengely körül forognak, egy – a távolságtól függő – állandó sebességgel. Radiális és axiális áramlás nincs, a tangenciális sebesség pedig a tengelytől való távolsággal fordítottan arányos. A hengersizmetrikus áramlás miatt célszerű hengerkoordinátákat használni, ekkor a sebesség axiális (v_z), radiális (v_r) és tangenciális (v_t) komponense:

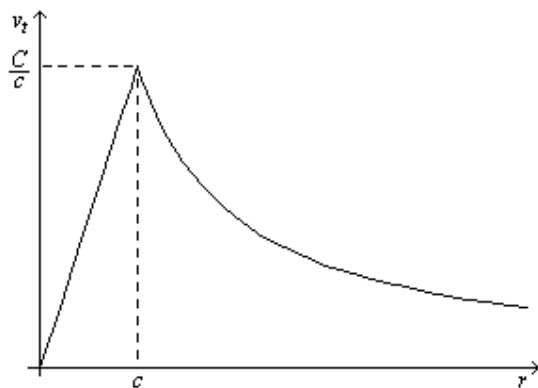
$$v_z = 0; \quad v_r = 0; \quad v_t = \frac{C}{r}. \quad (1)$$

A C konstans az örvénylés erősségére jellemző mennyiség, a továbbiakban ennek megfelelően örvényerősségnek nevezem. A modell érdekessége, hogy az örvénysűrűség a tengelyen kívül mindenhol zérus, ott viszont végtelen nagy. A tengelyhez közelítve az áramlás sebessége is végtelenhez tart, ami nyilván értelmetlen. Igazi örvények leírásához a modellen finomítani kell.

2. Rankine-örvény

A valódi örvények csak a tengelytől elég nagy távolságban viselkedhetnek ideálisan, az előbbi modellt tehát kis távolságok esetén érdemes módosítani. Így jutunk a Rankine-örvényhez, mely egy kritikus c távolságon kívül ideális örvénnyel egyezik meg, azon belül viszont a folyadék merev testként „forog”, a tangenciális sebesség egyenesen arányos a távolsággal. Világosan elkülönül tehát egy belső örvénymag, melynek sugara c . A különböző sebességkomponensek hengerkoordinátákban:

$$v_z = 0; \quad v_r = 0; \quad v_t = \frac{Cr}{c^2}, \text{ ha } r \leq c; \quad v_t = \frac{C}{r}, \text{ ha } r \geq c. \quad (2)$$



5. ábra: Tangenciális sebesség a Rankine-örvényben – C az örvényerősség, c az örvénymag sugara

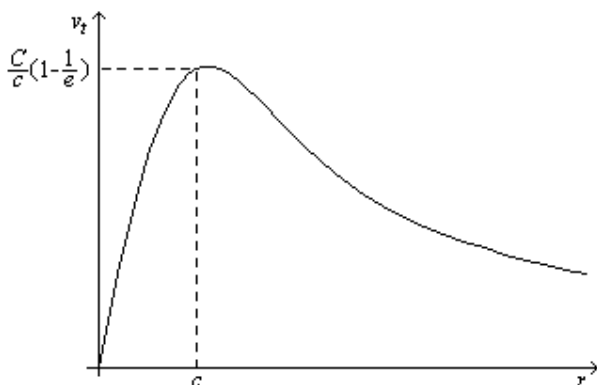
Az 5. ábrán a tangenciális sebesség látható a tengelytől való távolság függvényében. Azonnal feltűnik, hogy az $r = c$ pontban a függvénynek töréspontja van. Viszkózus folyadékokban ilyen törések nem létezhetnek, a belső súrlódás „lekerekíti” a görbét. Ennél is fontosabb azonban, hogy az örvénylés előbb-utóbb megáll, mozgási energiája a súrlódás által hővé alakul. Reális folyadékokban csak olyan áramlások lehetnek állandóak, ahol az elvesző energiát valamilyen forrás folyamatosan pótolja.

3. Burgers-örvény

Az előbb említett energiapótlás egy módja, ha a tengely irányában folyamatos befelé áramlást biztosítunk. Ekkor a kontinuitás miatt az axiális sebesség sem lehet mindenhol zérus. Az alábbi képletek által definiált örvényes áramlás a kontinuitási feltétel teljesítése mellett a Navier–Stokes-egyenleteket is kielégíti.

$$v_z = \frac{4\nu}{c^2} z; \quad v_r = -\frac{2\nu}{c^2} r; \quad v_t = \frac{C}{r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{c^2}\right)\right). \quad (3)$$

A képletekben szereplő ν állandó a folyadék kinematikai viszkozitása. A modell egyszerűségét nagyban növeli, hogy az axiális sebesség a távolságtól, a radiális sebesség viszont a magasságtól független. A tangenciális sebesség nagy távolságban ideális örvényhez, kis távolságban viszont merev forgáshoz tart; a képlet által definiált függvény egy „lekerekített” változata a Rankine-örvénynél megadottnak. Az állandók is megfeleltethetőek: C az örvényerősség értéke elég nagy távolságban, c pedig az örvénymag sugara, mely a külső részt a belsőtől elválasztja. A 6. ábrán látható tangenciális sebesség értéke körülbelül c távolságban a legnagyobb, szintén összhangban a Rankine-örvénnyel.

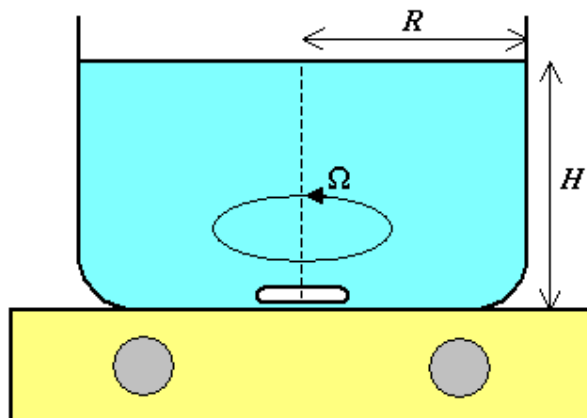


6. ábra: Tangenciális sebesség a Burgers-örvényben – C az örvényerősség, c az örvénymag sugara

Természetesen a Burgers-örvény sem „tökéletes”, a tengelytől távolodva például a radiális sebesség végtelenhez tart. Ezzel együtt a leírt elemi örvénymodellek közül messze a legjobban alkalmazható (ld. VI/3. pont).

III. A mérési elrendezés

Bármilyen mérés leírása előtt fontos definiálni a vizsgált rendszerre, tehát az edényre és a mágneses keverőre jellemző legfontosabb paramétereket.



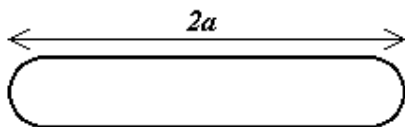
7. ábra: A mérési elrendezés vázlatos rajza – a fehér mágneses keverőfejet a sárga készülékben forgó mágnes forgatja

A kísérletek során közel hengeres edényeket töltöttem fel vízzel. Az aktuális edény sugarát R , a feltöltés magasságát pedig H jelöli (7. ábra). A szisztematikus méréseket négyféle edényben végeztem, négyféle vízmagasság mellett, a megfelelő paramétereket (R , H) az 1. táblázat tartalmazza.

R	3,8 cm	6,5 cm	10,5 cm	22,4 cm
H	12,0 cm	16,8 cm	24,8 cm	27,1 cm

1. táblázat: A mérésekhez használt edények sugarai és a beállított feltöltési magasságok – az R értékek hibája legfeljebb 0,1 cm, a valódi magasságok pedig a H értékek 0,2 cm-es környezetében szórnak

A kémiai laboratóriumokban rendszeresen használt mágneses keverő igen egyszerű elven működik; a 7. ábrán látható keverő-berendezésben egy erős permanens mágnes forgó állandó Ω szögsebességgel, ugyanilyen forgásra kényszerítve a szintén mágneses keverőfejet (8., 9. ábra). Fontos megjegyezni, hogy a létrejövő áramlás ezért nem teljesen stacionárius, a keverőfej közvetlen közelében sokkal inkább periodikusnak tekinthető, sőt, a keverőfej rezgései miatt lokálisan kisebb turbulenciák is kialakulhatnak (ld. V/4. pont).



8. ábra: A keverőfej oldalnézetből és az a sugár definíciója



9. ábra: A keverőfej keresztmetszete és a d magasság definíciója

A keverőfejek lapultsága miatt (9. ábra) a d magasság meghatározása problémát jelent. Tapasztalataim szerint stabilabb, ha az edény aljával valamelyik sík-felület érintkezik, így a síkok távolságát vettem a keverőfej d magasságának.

Négyféle keverőfejjel dolgoztam, ezek lényeges méreteit (a , d) a 2. táblázat foglalja össze.

a	1,25 cm	2,05 cm	2,50 cm	4,00 cm
d	0,75 cm	0,85 cm	0,90 cm	1,00 cm

2. táblázat: A keverőfejek szélességei és magasságai – 0,05 cm hibával

IV. Mérési módszerek

1. Szögsebesség mérése stroboszkóppal

A keverőfej szögsebességét a készüléken található potenciométer segítségével lehet szabályozni (jobb oldali szürke korong a 7. ábrán). A potenciométer állása és az Ω szögsebesség között azonban nincs egyértelmű kapcsolat, a különböző paraméterek (R , H , a) befolyásolják. Éppen ezért külön módszerre van szükség a szögsebesség pontos meghatározására, mely a további mérések elvégzéséhez kulcsfontosságú.

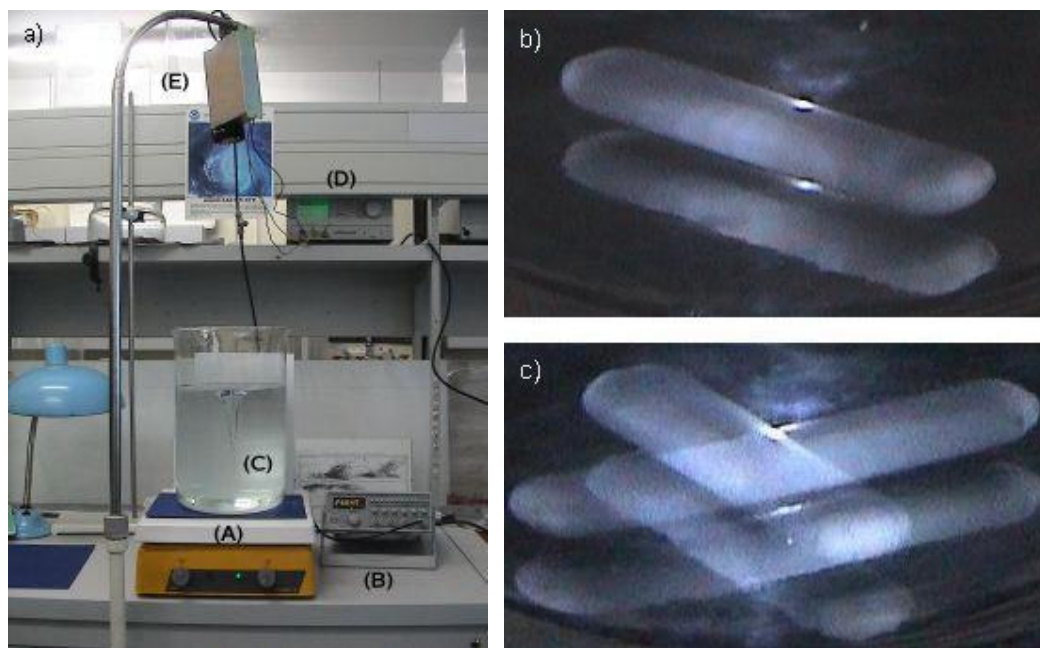
A rendkívül gyors forgás méréséhez egy stroboszkóp villogó fényét használtam; ez a 10a. ábrán látható. A fényimpulzusok f frekvenciájának megfelelő értékei mellett a keverőfej állni látszik az edény alján (10b. ábra). Ennek az a feltétele, hogy két felvillanás közt a keverőfej a fél-fordulat n egész számú többszörösét tegye meg:

$$\Omega \frac{1}{f_n} = n\pi ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

A stroboszkóp villogási frekvenciáját változtatva megtalálható az f_1 frekvencia, mely az f_n -ek közül a legnagyobb. Ebből az Ω értéke közvetlenül kiszámítható:

$$\Omega = f_1 \pi . \quad (5)$$

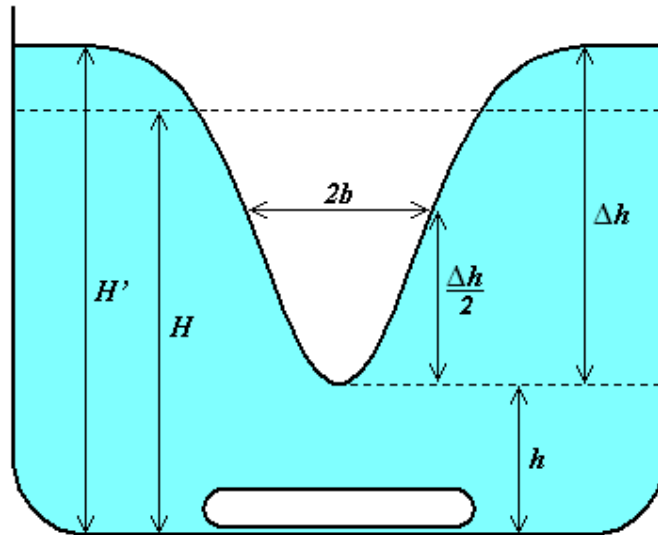
A nagyobb pontosság érdekében mindig megmértem a $2f_1$ frekvenciát is, ekkor a keverőfej két villanás közt negyed fordulatot tesz meg. Az edény alján egy stabil „kereszt” látható (10c. ábra), mely mintha két, egymásra merőleges keverőfejből állna. Általában a két frekvenciából (f_1 , $2f_1$) külön-külön számoltam szögsebességet, majd a két értéket átlagoltam. A frekvenciák bizonytalansága 0,1 Hz körüli, mely Ω -ra nézve (5) alapján kb. $0,3 \text{ s}^{-1}$ hibát jelent. A 20 és 120 s^{-1} közötti szögsebességeknek ez nagyjából 1%-a, így Ω bizonytalansága a többi hibaforráshoz képest elhanyagolható.



10. ábra: a) Mérési elrendezés a keverőfej szögsebességének meghatározásához: (A) - mágneses keverő, (B) - frekvenciagenerátor, (C) - a vízzel töltött edény, (D) - tápegység, (E) - stroboszkóp; a keverőfej látszólagos képe b) $f=f_1$ és c) $f=2f_1$ esetén

2. A tölcsér paramétereinek leolvasása

A keverés hatására a vízfelszín „behorpad” az edény közepén, létrejön egy jellegzetes alakzat, mely az I. fejezetben leírt lefolyótölcsérré emlékeztet. Néhány perc alatt a rendszer közelítőleg stacionárius állapotba kerül, ekkor a tölcsér méretei egy-egy középvérték körül ingadoznak. A tölcsér Δh magasságát és b félszélességét mértem az edény és a keverőfej paramétereinek (R , H , a , Ω) különböző értékei mellett.



11. ábra: A tölcsért jellemző legfontosabb paraméterek – nem méretarányos rajz

A 11. ábrán a felső szaggatott vonal az eredeti H vízmagasságot jelöli. Keverés esetén a középről kiszorult folyadék a vízszintet megemeli egy $H' > H$ értékre. Ennek mérése roppant egyszerű, egy függőlegesen az edény mellé állított vonalzóval megoldható. A felületi feszültség miatt a víz felszíne látszólag egy vékony sávban (meniszkusz) érintkezik az edény falával, ennek értelemszerűen az alját kell figyelembe venni.

Nehezebb meghatározni a tölcsér aljának h magasságát. Két vonalzót kell használni, az edény „innenső” ill. „túlsó” oldalán, ezzel kizárva a ferde leolvasás lehetőségét. A bizonytalanság azonban így is meglehetősen nagy, mert a rendszer nem teljesen stacionárius, a tölcsér alja szabálytalan, függőleges irányú rezgést végez, melynek amplitúdója akár az 1 cm-t is elérheti. A hiba csökkentése érdekében próbáltam a tölcsért minél hosszabb ideig figyelni, és az ingadozást „kiátlagolni”.

A tölcsér magassága az előbbi két mennyiségből rendkívül egyszerűen kiszámolható:

$$\Delta h = H' - h. \quad (6)$$

Ennek bizonytalansága főleg a tölcsér aljának mozgásából származik, és néhány esetben akár a 10-15%-ot is elérheti.

Még sokkal pontatlanabb a félértékszélesség feleként definiált b félszélesség mérése. Egy vízszintes vonalzót az edény „hátlujához” illetve leolvasható egy távolság, ez azonban még nem a keresett érték. Ebből a félszélességet a perspektíva és az edény falán történő fénytörés figyelembevételével kapjuk, az 1. függelékben leírt módon. Sajnos a tölcsér oldalirányban sem stabil, a rezgés mellett még ide-oda mozgást is végez, ezért a mért értékek akár 20-30%-os hibát is tartalmazhatnak.

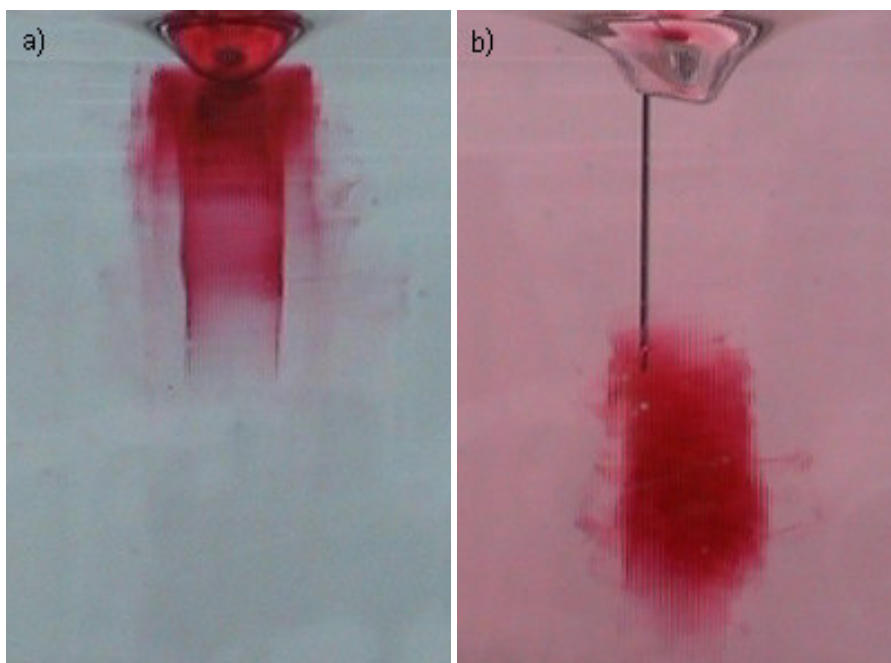
3. Gyöngyökkel történő nyomkövetés

Ha megfigyeljük a vízzel sodródó, kicsi műanyag gyöngyök mozgását, kvalitatív képet kaphatunk az edényben kialakuló áramlásról. Az örvénylő vízbe gyöngyöket ejtettem, majd egy kamera segítségével felvettem a mozgásukat. A hengeres edényt előtte egy nagyobb, téglatest alakúba helyeztem, és a külső részt is feltöltöttem, így csökkentve az edény falánál létrejövő torzító fénytörést és a zavaró tükröződéseket.

Természetesen a gyöngyök nem mozognak pontosan együtt a vízzel, mozgásukról a vízhez képesti relatív sebességgel – egyenesen vagy négyzetesen – arányos közegellenállás gondoskodik. Ennek vizsgálatára is végrehajtottam egy egyszerű kísérletet. Egy elegendően széles üvegcsövet megtöltöttem vízzel, beleraktam egy gyöngyöt, majd a tetejét lezártam. Gondosan ügyeltem rá, hogy zavaró levegőbuborékok ne maradjanak a csőben. A gyöngy könnyebbnek bizonyult a víznél, mert a cső tetején maradt, annak megfordítása után viszont megindult a cső eredeti alja felé. Elég hamar elért egy állandó sebességet, ami a megtett út és a stopperrel lemért idő hányadosa, tehát könnyen meghatározható. Ez a sebesség a gyöngyökre ható közegellenállás „erősségét” jellemzi, hogy azok mekkora sebességgel tudnak a vízhez képest mozogni. A mérést háromféle gyönggyel végeztem el, összesen 15-ször. Szándékosan választottam az átlagnál nagyobb és annál kisebb gyöngyöt is, úgy tűnik, nincs köztük jelentős különbség.

4. Festékekkel történő nyomkövetés

A vízbe fecskendezett festék a gyöngyökhöz hasonlóan felfedi az áramlási képet. Ezért festék áramlásáról is készítettem videókat, felvettem a mozgást a befecskendezés pillanatától a végső szétesésig. Különbőféle helyekre juttattam festéket, legtöbbször a tölcser közepébe (12a. ábra), de néha közvetlenül a víz alá is (12b. ábra). A fénytörés és a tükröződések hatását az előző pontban leírt módon küszöböltem ki.



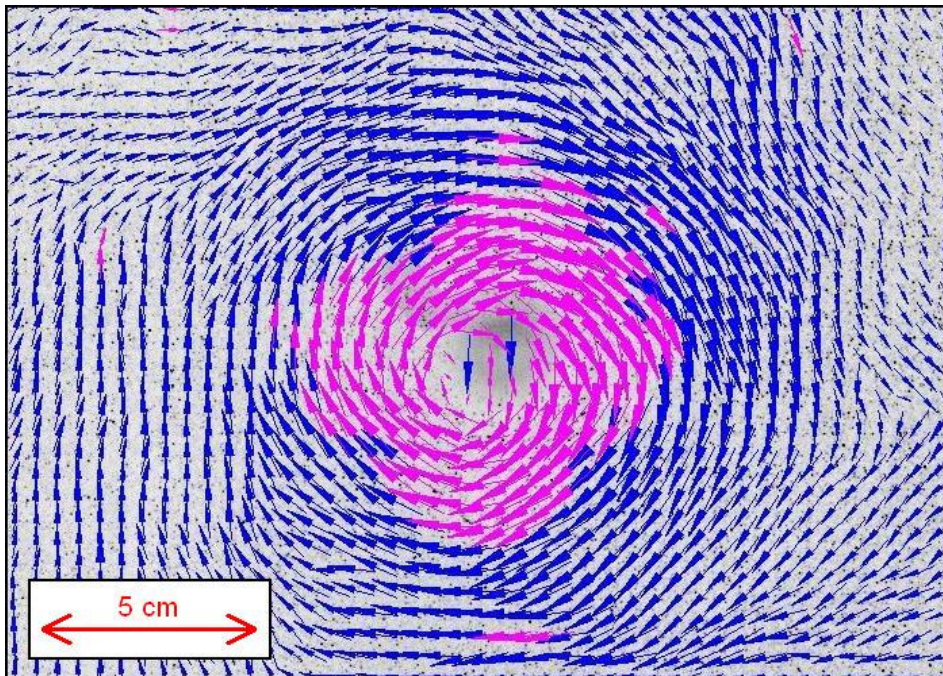
12. ábra: Festék fecskendezése a) a tölcser közepébe és b) közvetlenül a víz alá

5. Sebességtér felvétele PIV eljárással

A PIV (Particle Image Velocimetry) eljárás segítségével egy adott síkban közvetlenül megállapítható az áramlás síkba eső komponense. A kapott sebességértékeket elemezve fontos információkat szerezhetünk az áramlási képről [5].

A PIV felvételek készítése előtt igen kicsiny részecskéket kell az áramló folyadékban egyenletesen szétoszlatni. Ezek a folyadékon áthatoló, síkban terjedő lézertér hatására előtűnnek, így a síkra merőleges irányban elhelyezett kamera csak a síkban levő részecskéket „látja”. A lézer két rendkívül rövid felvillanást bocsát ki egymástól néhány századmásodperccel elválasztva. Ezen idő alatt a részecskék a folyadékkal együtt elmozdulnak, a kamera által készített második kép ezért eltér az elsőtől. Egy számítógépes program feladata, hogy a két kép összetartozó részecske-párjait azonosítsa, majd az eltelt idő és az elmozdulás ismeretében a sebesség síkba eső komponensét kiszámítsa. Gyakran lépnek fel azonosítási hibák (pl. ha a részecske két felvillanás közt kilép a síkból), ekkor bizonyos pontokba irreálisan nagy sebességek kerülnek. Szerencsére ezek éppen feltűnőségük miatt könnyen kiszűrhetők, a program ekkor a környező adatokból interpolál sebességet.

A PIV eljárást egy ILA gyártmányú készülék segítségével végeztem; a legnagyobb edényben ($R = 22.4$ cm) mértem, közepes vízmagasságnál ($H = 16.8$ cm) és közepes keverőméretnél ($a = 2.50$ cm, $d = 0.90$ cm). A mágneses keverővel három különböző szögsebességet állítottam be. A lézertér síkját vízszintesre állítottam, így a radiális és tangenciális sebességkomponensek váltak mérhetővé. A lézersík mozgatásával négy különböző magasságot vizsgáltam, feltérképezve szinte az egész edényt.



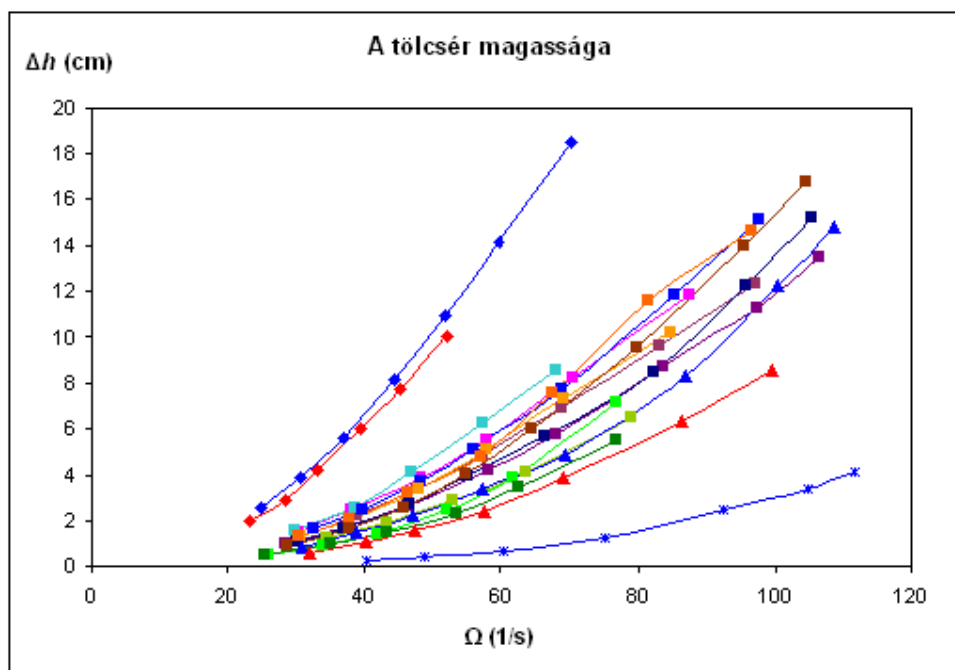
13. ábra: PIV felvétel részlete $\Omega = 35.5/s$ esetén, $z = 13$ cm magasságban; a felvillanások között eltelt idő $\Delta t = 0,08$ s; a kis vektorok az adott pontbeli sebességgel arányosak, az ábra léptékei szerinti 1cm hosszúság körülbelül 3 cm/s sebességet jelent – rózsaszín nyilak jelzik az interpolált értékeket

Az 13. ábra alapján látható, hogy az áramlás nem teljesen hengersizmetrikus, kisebb másodlagos örvényeket fedezhetünk fel a kép szélső részén.

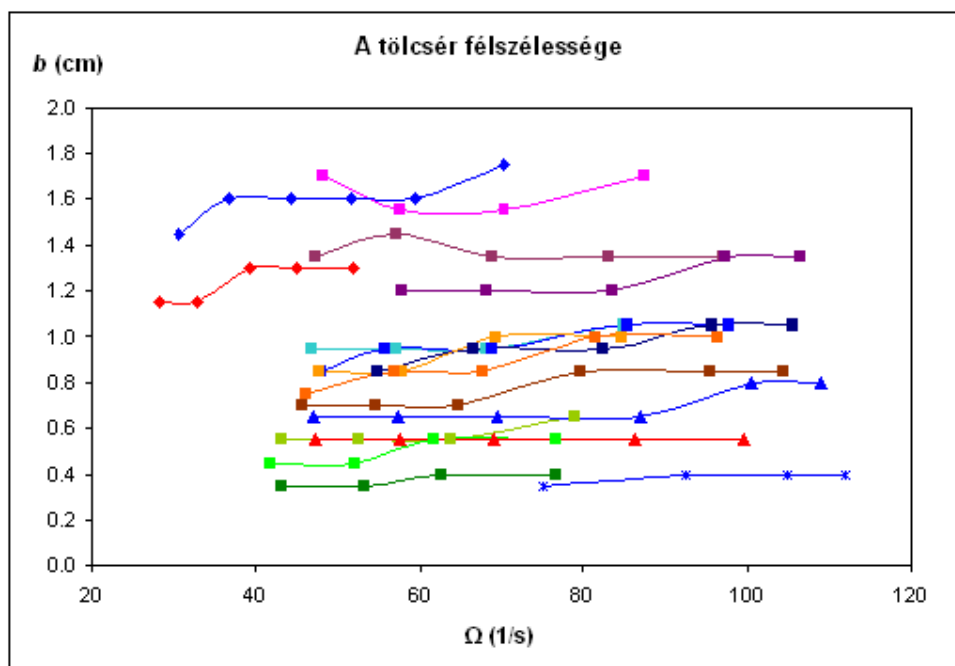
V. Mérési eredmények

1. A tölcsér paramétereinek értékei

Az alábbi diagrammokon a tölcsér magasságát (14. ábra) és félszélességét (15. ábra) ábrázoltam az edény és a keverőfej paramétereinek függvényében. Külön figyelmet fordítottam az Ω szögsebességtől való függésre, egy görbe adatai csak ebben térnek el. Az egyes görbék viszont más paraméterekben is különböznek egymástól, a formák és színek jelentését a 3. táblázat tartalmazza.

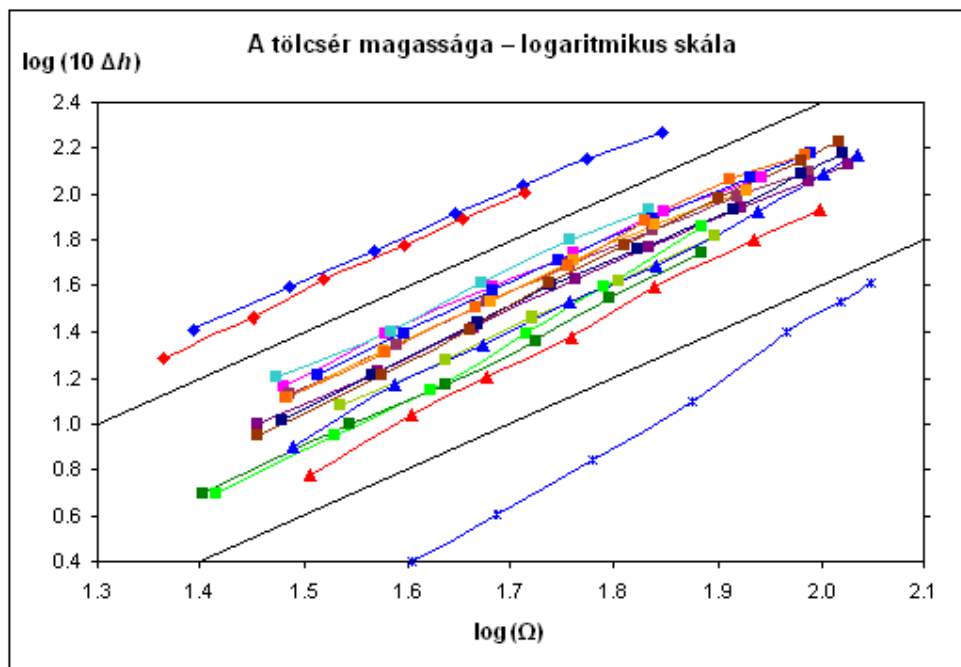


14. ábra: A tölcsérmagasság Ω -függése egyéb paraméterek különböző értékeinél (jelkulcs: 3. táblázat)



15. ábra: A tölcsér félszélességének Ω -függése (jelkulcs: 3. táblázat)

Az előbbi ábrák alapján a félszélesség első közelítésben független a szögsebességtől, a magasság viszont Ω valamilyen hatványfüggvényének tűnik. Ezt a sejtést a 16. ábrán látható logaritmikus ábrázolással igazoltam.



16. ábra: A tölcsermagasság logaritmikus ábrázolása (jelkulcs: 3. táblázat) – a berajzolt fekete egyenesek meredeksége 2

—*— $a=1.25$ cm, $d=0.75$ cm	—■— $R=3.8$ cm, $H=12.0$ cm	—□— $R=6.5$ cm, $H=12.0$ cm	—◇— $R=10.5$ cm, $H=12.0$ cm	—▲— $R=22.4$ cm, $H=12.0$ cm
—▲— $a=2.05$ cm, $d=0.85$ cm	—■— $R=3.8$ cm, $H=16.8$ cm	—□— $R=6.5$ cm, $H=16.8$ cm	—◇— $R=10.5$ cm, $H=16.8$ cm	—▲— $R=22.4$ cm, $H=16.8$ cm
—■— $a=2.50$ cm, $d=0.90$ cm	—■— $R=3.8$ cm, $H=24.8$ cm	—□— $R=6.5$ cm, $H=24.8$ cm	—◇— $R=10.5$ cm, $H=24.8$ cm	—▲— $R=22.4$ cm, $H=24.8$ cm
—◆— $a=4.00$ cm, $d=1.00$ cm			—◆— $R=10.5$ cm, $H=27.1$ cm	

3. táblázat: A 14., 15., 16., 29., 30. és 31. ábrák kombinált jelkulcsa – a formák (csillag, négyzet, stb.) a keverőfejre, míg a színek az edény méreteire jellemzőek

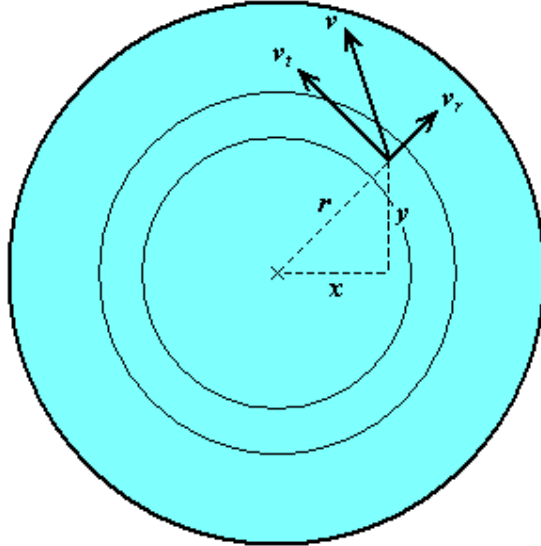
A 16. ábra grafikonjai egymással közel párhuzamosak, tehát Ω hatványkitevője minden adatsorra ugyanaz. A berajzolt fekete egyenesek alapján látható, hogy az egyenesek közös meredeksége körülbelül 2, vagyis a tölcser magassága a keverőfej szögsebességének négyzetével arányos:

$$\Delta h \sim \Omega^2. \quad (7)$$

A különböző adatsorok között a négyzetes függvény együtthatójában mutatkozik eltérés. A 16. ábráról leolvasható, hogy a keverőfej sokkal jobban befolyásolja az együttható értékét, mint az edény méretei (R , H). Ennek a függésnek a részletes vizsgálatára később térek ki (ld. VI/1. pont).

2. A PIV felvételek értékelése

A PIV eljárás alkalmazásával kapott felvételeket statisztikai elemzésnek vettem alá. A lézerefény síkját vékony, koncentrikus gyűrűkre bontva (17. ábra) meghatároztam a felvett síkokban a v_r radiális és a v_t tangenciális sebesség értékét, az edény tengelyétől való távolság függvényében.



17. ábra: A tangenciális és radiális sebességek meghatározása

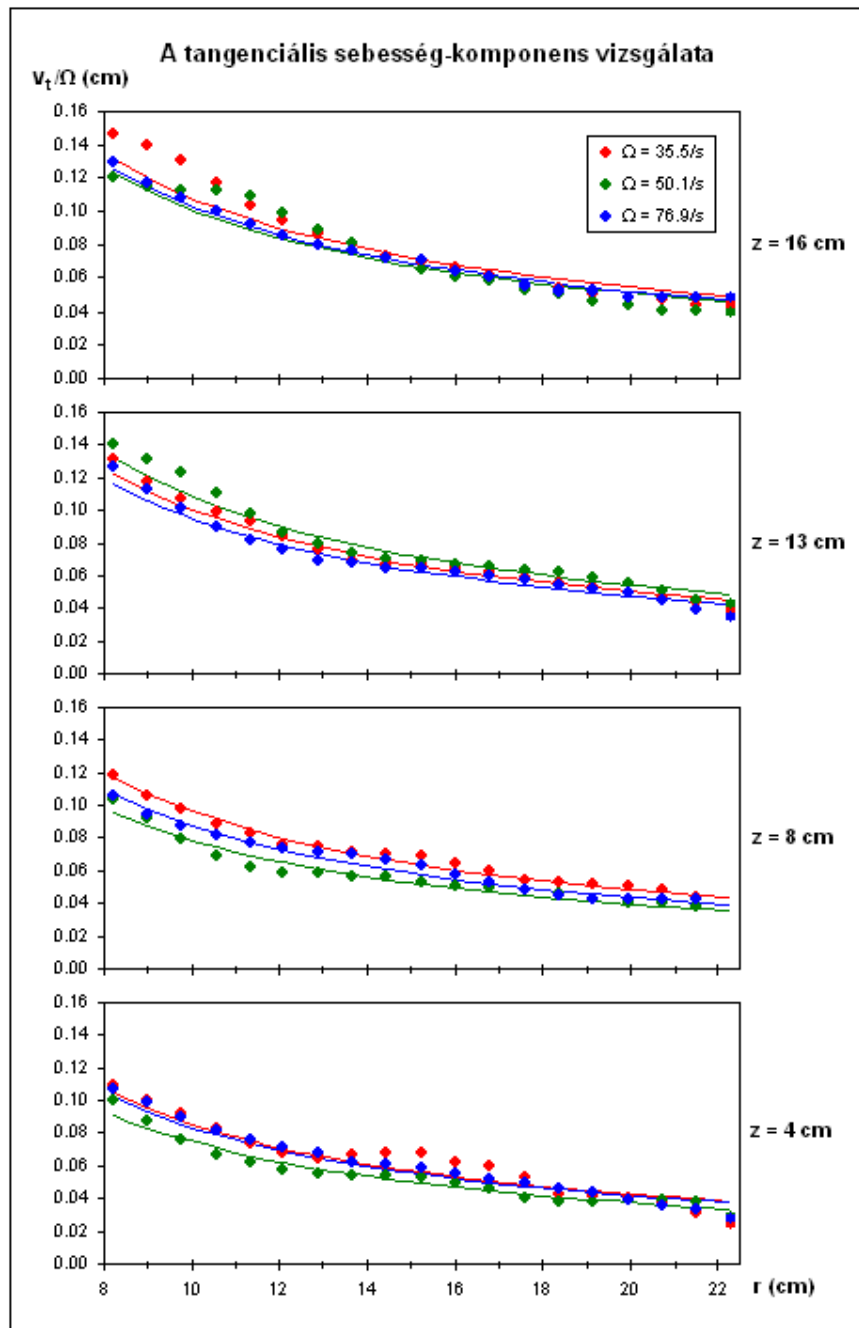
A számítógépes program által derékszögű koordinátákban kiadott sebességeket (v_x, v_y) az alábbi összefüggések segítségével számoltam át hengerkoordinátákra:

$$v_r = \frac{1}{r}(v_x x + v_y y); \quad (8)$$

$$v_t = \frac{1}{r}(v_y x - v_x y). \quad (9)$$

A tangenciális sebesség esetén az óramutató járásával ellentétes irányt választottam pozitívnak. Az egyes sebességkomponensekből a gyűrűkön belül átlagot számoltam, az így kapott értékeket pedig az adott gyűrű közepes sugarához rendeltem hozzá; ezzel jutottam a sebességek távolságfüggéséhez. Az előbbi átlagoláshoz több – azonos körülmények között készült – felvételt is figyelembe vettem, kiküszöbölve a 13. ábrán látott másodlagos örvények zavaró hatását.

Feltételeztem, hogy a sebességek arányosak a keverőfej szögsebességével, ezért a megfelelő diagrammokon (18., 19. ábra) rögtön Ω -val osztva ábrázoltam őket. Sajnos az edény közepén csak interpolált sebességek fordulnak elő (13. ábra), melyek nem megbízhatóak, ezért a középponthoz 8 cm-nél közelebb levő értékeket figyelmen kívül hagytam.



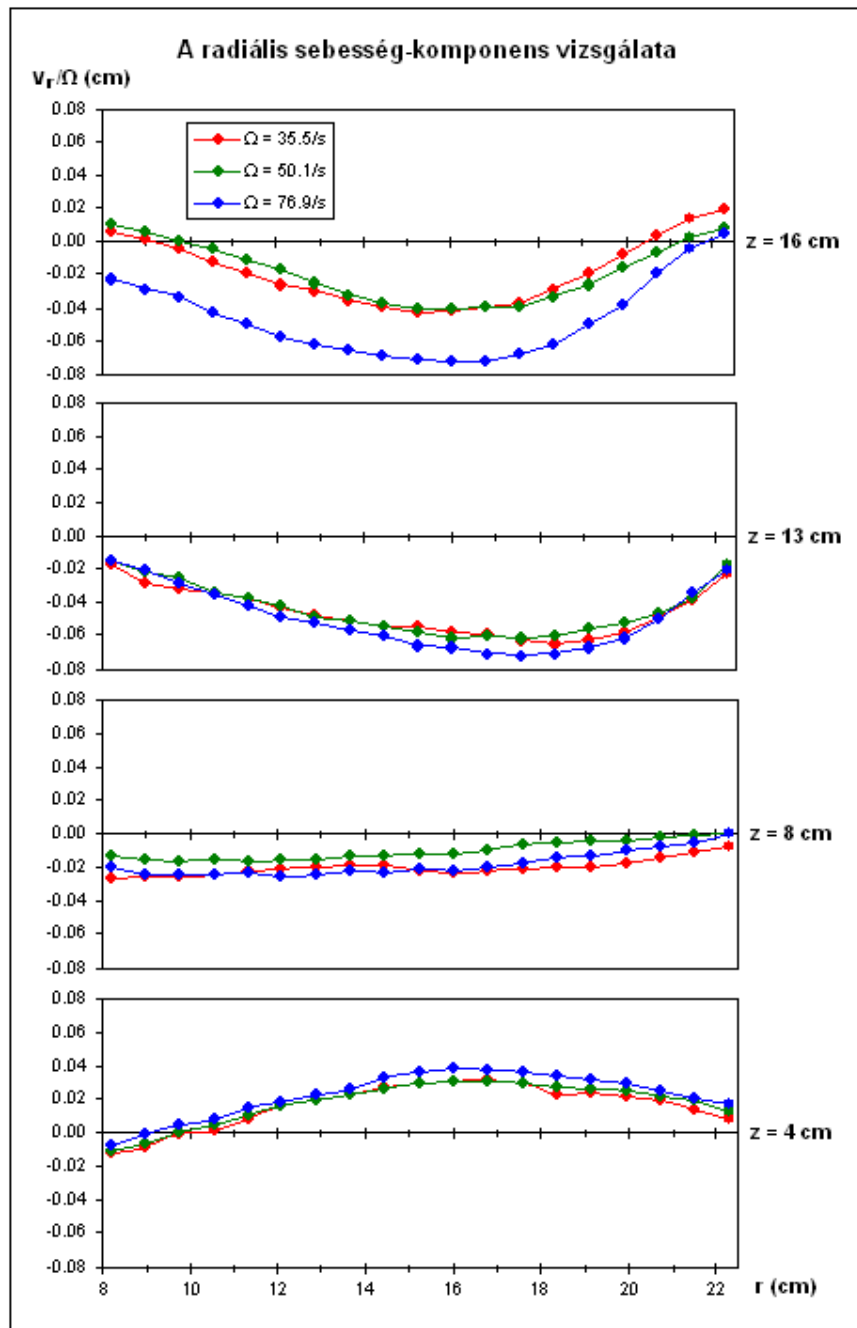
18. ábra: Az áramlási sebesség tangenciális komponense a PIV mérés alapján; a pontok mért értékek, a görbék pedig C/r alakú illesztett hiperbolák – z az edény aljához képesti magasságot jelenti

A 18. ábra jó egyezést mutat a mérési pontok és a rájuk illesztett hiperbolák között. A tengelytől való távolság és a tangenciális sebesség szorzata tehát egy adott síkban állandó, sőt, a különböző síkok közt sincs jelentős különbség. Megállapítható, hogy egy bizonyos, 8 cm-nél kisebb távolságon kívül a tangenciális áramlás az (1) ideális örvényével egyezik meg. Az ehhez tartozó örvényerősség valóban arányos a keverőfej szögsebességével, hiszen az Ω -val skálázott görbék jól illeszkednek egymáshoz:

$$C = A\Omega . \quad (10)$$

Az A együttható a paraméterek (R , H , a) konkrét értékei mellett meghatározható:

$$A = 0.95 \text{ cm}^2 \pm 0.20 \text{ cm}^2 . \quad (11)$$



19. ábra: Az áramlási sebesség radiális komponense a PIV mérés alapján

Az 19. ábra grafikonjainak illeszkedéséből látható, hogy a radiális sebesség szintén egyenesen arányos a keverőfej szögsebességével. A másik komponenssel ellentétben viszont a magasságtól való függés nem hanyagolható el, sőt, kvalitatív szinten is észrevehető. A két legfelső sík közti eltérés még nem jelentős, az edény tetején egy viszonylag konstans befelé áramlás történik. Lefelé haladva a radiális sebesség előjelet vált, $z = 4$ cm-nél már inkább kifelé áramlik a víz. A helyzet azonban nem ilyen egyszerű, mert a tengelyhez viszonylag közel még ilyen „mélyen” is megmarad a befelé áramlás; $r = 8$ cm-nél minden síkban egy lassú beáramlás mérhető, a radiális sebesség alig változik a magassággal. Fontos még az $r = R = 22,4$ cm-es távolság, ahol a peremfeltétel miatt a radiális áramlás biztosan eltűnik. Az Ω -val osztott sebesség zérustól való eltérése itt legfeljebb 0,02 cm, ez jól jellemzi a mérés bizonytalanságát.

A PIV eljárás segítségével az axiális sebesség nem mérhető közvetlenül, a függőleges elmozdulások láthatatlanok maradnak a kamera számára. Szerencsére azonban a radiális sebesség ismeretében ez a komponens is kiszámítható a kontinuitási egyenlet segítségével, mely hengersizmetrikus esetben és hengerkoordináták alkalmazásával a következő alakot ölti [1]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(v_r r). \quad (12)$$

A radiális sebességből (12) bal oldala közvetlenül adódik. A tengelytől elegendően távol ($r > 8$ cm) felhasználható még, hogy $z = H' \approx H = 16,8$ cm magasságban az axiális sebesség értéke zérus. Mivel így a $v_z(z)$ függvény deriváltja és egy adott pontbeli értéke ismert, a függvény egyértelműen meghatározható.

Sajnos a radiális sebesség nem ismert a tér minden pontjában, ezért az axiális sebesség kiszámításához szükséges deriválást és integrálást nem lehet pontosan elvégezni. A fenti derivált közelítő értéke egy ismert r_n pontban:

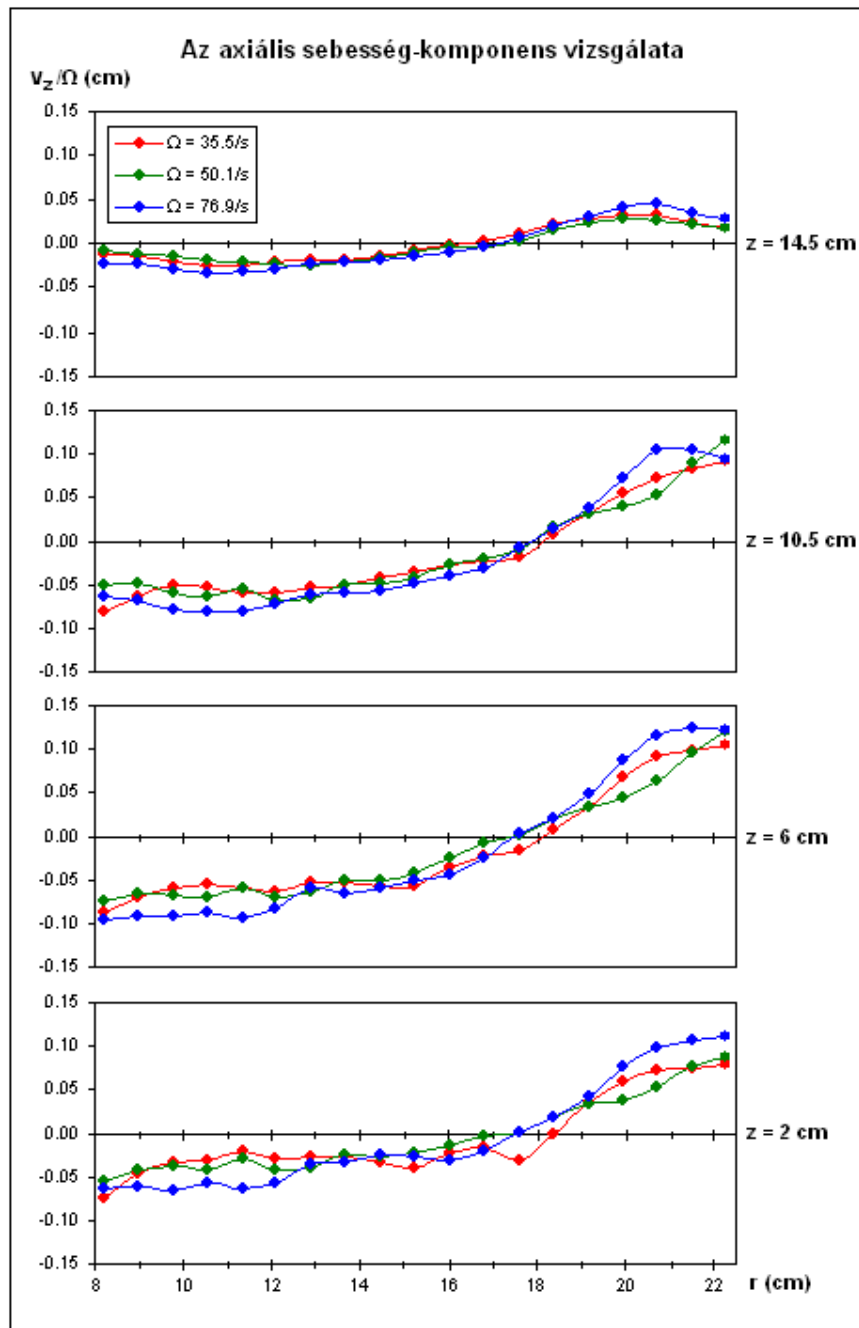
$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \approx -\frac{r_{n+1}v_r(r_{n+1}) - r_n v_r(r_n)}{(r_{n+1} - r_n)(r_{n+1} + r_n)} - \frac{r_n v_r(r_n) - r_{n-1}v_r(r_{n-1})}{(r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1})}. \quad (13)$$

A szomszédos ismert pontokat r_{n-1} és r_{n+1} jelöli. A közelítő integráláshoz fel kell tenni, hogy az axiális sebesség deriváltja a felvett síkok közelében független a magasságtól. A z tengelyt olyan intervallumokra bontjuk, melyek határai a szomszédos mért magasságok számtani közepei. Egy ilyen z_n határmagasságban az axiális sebesség közelítő értéke:

$$v_z(z_n) \approx v_z(z_{n-1}) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(z_n - z_{n-1}). \quad (14)$$

Ez a rekurzió egyértelmű, hiszen tudjuk, hogy $v_z(z_0) = v_z(H') = 0$.

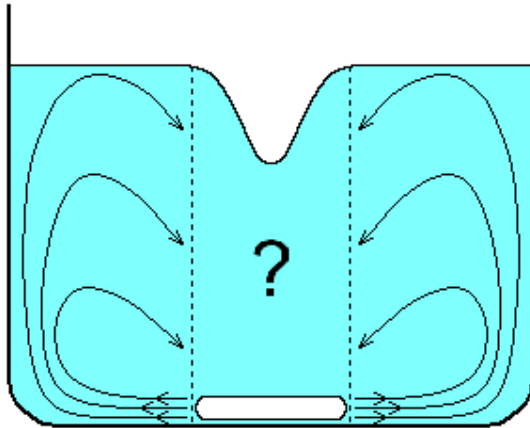
Az előbbi módszerrel kiszámolt axiális sebesség az 20. ábrán látható, rögtön osztva a keverőfej szögsebességével. Az edény legaljára a módszer nem alkalmazható, hiszen ott a radiális áramlás egészen más, mint akár 2-3 cm-rel feljebb; a forgó keverőfej nyilván igen nagy sebességgel löki a vizet kifelé. Ezért vettem a legutolsó intervallum alsó határának a $z_4 = 2$ cm-es magasságot, ahol a keverőfej közvetlen hatása még nem annyira jelentős.



20. ábra: Az áramlási sebesség axiális komponense a mért v_r értékek és a (12) összefüggés alapján

A 20. ábra alapján úgy tűnik, hogy a mért tartományban az axiális sebesség is lineárisan függ a keverőfej szögsebességétől. Az áramlás jellege minden síkban ugyanolyan; a belső területeken lefelé, egy külső 4-5 cm-es gyűrűben pedig felfelé áramlik a víz. A magassággal csak a sebesség „amplitúdója” változik, $z = 6$ cm-nél a legnagyobb. Érdekes, hogy a külső felfelé áramlás mennyire erős, sebessége a keverőfej leggyorsabb forgásánál közel 10 cm/s. Vélhetően ez a keverőfej által nagy sebességgel kilökött víztömegnek köszönhető, mely az edény falának ütközve gyors felszállásra kényszerül.

A PIV felvételek elemzésével szerzett információkat a 21. ábrán foglaltam össze; az ott látható radiális és axiális áramláshoz egy ideális örvény tangenciális áramlása adódik hozzá. Az áramvonalak az adott pontbeli sebesség irányába mutatnak, míg sűrűségükből a sebesség nagyságára lehet következtetni. Természetesen a rajz nem pontos, inkább csak kvalitatív képet ad az edényben kialakuló áramlásról.



21. ábra: Radiális és axiális áramlási kép ($r > 8$ cm)

Az áramvonalak zártságából következik, hogy az edény közepén ($r < 8$ cm) lefelé áramlásnak kell dominálnia. A részletek azonban a PIV felvételekből nem derülnek ki, megismerésükhöz figyelembe kell venni a további módszerek eredményeit is.

3. Gyöngyökkel történő nyomkövetés

A kísérletekben használt műanyag gyöngyök álló közeg esetén nem tudnak tartósan a víz alatt maradni, víznél kisebb sűrűségük miatt másodperceken belül elérik a felszínt (4. táblázat). A tölcsérbe ejtve őket azonban elszakadnak a felszíntől, majd az edény tengelyében többé-kevésbé stabil egyensúlyi állapotba kerülnek. Ez csak úgy lehetséges, ha a tölcsér alatt egy rendkívül erős lefelé áramlás valósul meg, ekkor ugyanis a lefelé mutató közegellenállás a gyöngy súlyával együtt kompenzálja a felhajtóerőt. Az ehhez szükséges leáramlási sebesség viszont megegyezik azzal az állandósult sebességgel, amelyet a gyöngy az álló közegben érne el. Ezt mértem meg a IV/3. pontban leírt módon; a mérés eredményeit a 4. táblázat tartalmazza.

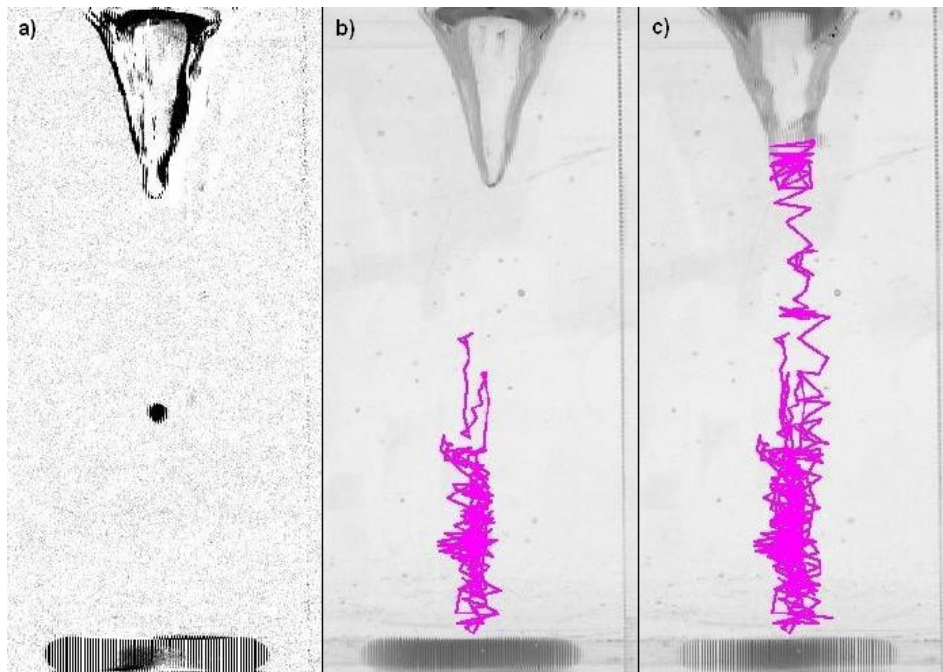
a)	b)	c)
2,16 s	2,04 s	1,96 s
2,16 s	2,12 s	1,99 s
2,26 s	2,22 s	2,09 s
2,41 s	2,32 s	2,15 s
2,49 s	2,37 s	2,26 s
2,30 s	2,21 s	2,09 s

4. táblázat: A felszínre érkezési idő a) átlagnál kisebb, b) átlagos méretű és c) átlagnál nagyobb gyöngy esetén (a cső magassága $H = 16,5$ cm) – vastagon szedve a megfelelő idők átlaga látható

A különböző gyöngyök a 4. táblázat szerint nagyjából ugyanakkora állandó sebességre gyorsulnak fel, melynek értéke körülbelül 7-8 cm/s. Ugyanebbe a nagyságrendbe esik tehát az edény tengelyében létrejövő lefelé áramlás sebessége is.

Külön figyelmet érdemel az egyensúly stabilitása. Belátható, hogy stabil egyensúlyi helyeknél lefelé haladva a leáramlás sebességének csökkennie kell (ld. 3. függelék). Ezt bizonyítja az is, hogy a gyöngyök lejjebb süllyednek a keverőfej gyorsabb forgása esetén. A leáramlási sebesség ugyanis valamennyire biztosan növekszik Ω -val – ekkor a „régi helyen” már túl nagy a sebesség, mélyebben viszont éppen megfelelő. Érdekes, hogy a tölcser alatt 2-3 cm-rel már előfordul stabil egyensúly, úgy tűnik, hogy a leáramlás maximuma még ennél is közelebb van a tölcser aljához.

Oldalirányban az erős leáramlás csak egy igen kis térrészre korlátozódik, melynek sugara milliméteres nagyságrendű. Ha a gyöngy egy kicsit eltávolodik a tengelyt alkotó vékony fonáltól, a túlsúlyba kerülő felhajtóerő azonnal megindítja felfelé. Víznél kisebb sűrűsége miatt azonban „anti-centrifugális erő” hat rá (ld. 2. függelék), mely visszatéríti a tengelyhez. Ott a gyöngy lesüllyed, és újra egyensúlyba kerül. Soha nem hagy el egy vékony áramlási csövet (22. ábra), hacsak az edény alját nagyon megközelítve a keverőfej közvetlen közelébe nem kerül.



22. ábra: a) Gyöngy az áramlási csőben; rózsaszín vonallal jelölt pályája b) 10s és c) 20s követés esetén

A gyöngy pályáját hosszabb ideig követve szépen kirajzolódik az említett áramlási cső (22. ábra); a valóságosnál azért tűnik egy kicsit vastagabbnak, mert a tölcserrel együtt oldalirányú mozgást is végez. Figyelemre méltó a gyöngy által leírt mozgás jellege is; teljesen szabálytalan, kaotikus. Ennek ellenére egy jól meghatározott tartományra terjed csak ki, a különféle erők nem engedik eltávolodni.

4. Festékkal történő nyomkövetés

Az áramlást a tengelytől távol megfestve kvalitatív szinten igazoltam a PIV felvételek eredményeit. A befecskendezett festék hamar szétszóródik ugyan, de mozgásának iránya még éppen megállapítható. A festés nagy előnye a PIV eljárással szemben, hogy az edény legalján és a tengely mentén ($r < 8$ cm) is működik. Megfigyeltem így a keverőfej körüli rendkívül gyors kiáramlást, továbbá hogy a tengelyhez 8 cm-nél közelebb is lefelé áramlik a víz; feláramlás valóban csak az edény falánál történik.

Az eddigiektől gyökeresen eltérő jelenséget láthatunk, ha a tölcsér közepébe juttatunk festéket. Elég gyorsan kialakul egy élénk, henger alakú festékfüggöny (23. ábra), mely utána akár még percekig megfigyelhető. A függöny a paraméterek (R , H , a , Ω) összes mért értéke mellett létrejön, bizonyos eltérések azonban láthatóak. A henger sugara például nagyjából a félszélességgel egyezik meg, mely – mint láttuk (15. ábra) – függ a fenti paraméterektől.

Vélhetően a függöny egy aránylag kis sebességű zónában alakul ki, ellenkező esetben hamar szétszóródna. Az eddigiek szerint az áramlás tengelyét alkotó fonálban egy igen erős leáramlás valósul meg, a függönyön kívül pedig szintén lefelé áramlik a víz. Adódik tehát, hogy a festékfüggöny területén a leáramlásnak lokális minimuma legyen. A víz ekkor lényegében csak egy vízszintes síkban forog körbe-körbe, ennek köszönhető a függöny szokatlan stabilitása.

Érdekes megvizsgálni a festékfüggöny kialakulásának folyamatát. A terjedő festéket követve úgy tűnik, hogy a „kis sebességű” zónában a víz elég gyorsan áramlik lefelé (3-4 cm/s). Ilyen nagy állandó sebesség esetén a festékfüggöny nem lehetne stabil. Feltehetően a központi áramlási fonál körül az axiális sebesség-különbségből fakadó nyírás turbulenciát, kicsi másodlagos örvényeket hoz létre, ezek a festéket kiszórják a csövet határoló területre. Így haladhat a festék frontja a vártnál gyorsabban lefelé, összhangban a megfigyelésekkel. A nagy sebesség a fonálból hamar „kimossa” a festéket, kívül viszont kialakulhat a stabil függöny; ez alapján érthető, hogy a függöny valóban azt a tartományt jelöli, ahol az axiális sebesség közel zérus.



23. ábra: Stabil festékfüggöny



24. ábra: Festékfüggöny kialakulás közben

A 24. ábrán a festékfüggöny kialakulás közben látható; tisztán kirajzolódik a központi áramlási fonál, mely a festék gyors szállításáért felelős.

Néha az edény tengelye körül több, egymásba ágyazott függőnyt is láttam, melyek egy igen érdekes struktúrát hoznak létre (25., 26. ábra). Ezt a jelenséget azonban nem vizsgáltam részletesen.

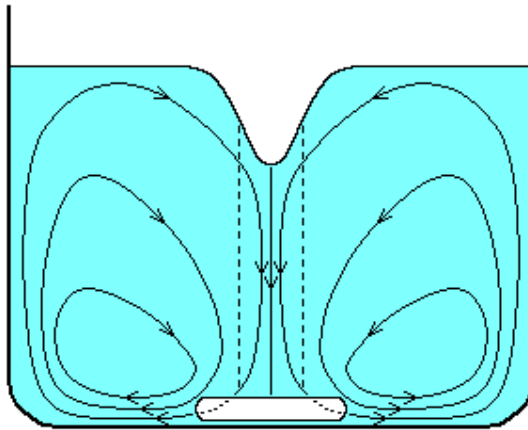


25. ábra: Kettős festékfüggöny
(a központi áramlási fonál megfestésével)



26. ábra: Kettős festékfüggöny
(az áramlási cső szélének megfestésével)

A 27. ábra végül az utolsó három pont mérési eredményeit foglalja össze. Az áramvonalak segítségével kvalitatívan ábrázoltam a radiális és az axiális áramlást, figyelembe véve a jellegükről szerzett összes információt.



27. ábra: Radiális és axiális áramlási kép – szaggatott vonalak jelzik a festékfüggöny helyét

A 27. ábrán jól kivehető egy áramlási cella, mely a radiális és az axiális áramlást meghatározza. Tulajdonképpen ez egy másodlagos örvényt jelent, melynek kör alakú középvonala („tengelye”) a középső, függőleges tengelyű örvényt egy vízszintes síkban körülveve önmagába záródik. Ennek mentén eltűnik a radiális és az axiális sebesség, a víz a festékfüggőnyénél látott módon csak körbe-körbe forog. A PIV felvételek eredményei alapján ez a középvonal az edény aljához közel, sugarának felénél kijjebb található.

VI. Kvantitatív összefüggések

1. A tölcsér magasságának függvénye

Az edényben kialakuló áramlást – és a tölcsér magasságát – meghatározó egyenletek rendkívül bonyolultak, a forgó és rezgő keverőfej miatt gyakorlatilag még numerikusan sem lehet őket megoldani. Ilyen esetekben gyakran célszerű a dimenzió-analízis alkalmazása [1]. A Δh tölcsérmagasságot a keverőfej d magasságával osztva egy dimenzió nélküli értéket kapunk, mely csak a rendszerre jellemző többi dimenziómentes paraméter függvénye lehet.

Egy gravitációs térben zajló viszkózus áramlásra jellemző a $Re = ul/\nu$ Reynolds-szám és a $Fr = u/\sqrt{gL}$ Froude-szám, ahol u az áramlás tipikus sebessége, l és L pedig jellegzetes vízszintes és függőleges méretek. Számértékük arra utal, hogy a rendszer viselkedésére mennyire gyakorol jelentős hatást a folyadék viszkozitása ill. a nehézségi erő. Ideális áramlás esetén egyáltalán nem, ekkor $Re = Fr = \infty$. A vizsgált rendszerben a keverőfej hozza létre az áramlást, ezért az előbbi számokat a keverőfej méreteivel és az V/2. pontban kísérletileg igazolt $u \sim \Omega$ feltevéssel definiálom:

$$Re = \frac{\Omega a^2}{\nu}; \quad Fr = \frac{\Omega d}{\sqrt{gR}}. \quad (15)$$

Tipikus értékek ($\Omega = 50 \text{ s}^{-1}$, $R = 10 \text{ cm}$, $a = 2,5 \text{ cm}$, $d = 1 \text{ cm}$, $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$) esetén:

$$Re \approx 30000; \quad Fr \approx 0.5. \quad (16)$$

A dimenzió nélküli függvényben felléphetnek még az edényre és a keverőfejre jellemző távolságok hányadosai. Így az alábbi függvényhez jutunk:

$$\frac{\Delta h}{d} = f\left(Re, Fr, \frac{a}{d}, \frac{a}{R}, \frac{H}{R}\right). \quad (17)$$

A fenti f függvény argumentumában helyet kaphatna még a felületi feszültség hatására jellemző Eötvös-szám. Becsléseim szerint azonban ez a jelenség csak 10-15%-kal húzza össze a tölcsért, ekkora hiba pedig a magasság leolvasásából is származhat.

A (17)-ben szereplő f függvényt úgy kell meghatározni, hogy a mérési adatoknak a lehető legjobban megfeleljen. Az V/1. pont (7) képlete alapján a tölcsérmagasság Ω négyzetével arányos; ezt éppen megkapjuk, ha az f függvényben a Reynolds- és a Froude-szám szorzatát szerepeltetjük, ezzel azt is kifejezve, hogy mindkét szám lényeges a tölcsérmagasság szempontjából:

$$\frac{\Delta h}{d} = Re Fr \cdot \Phi\left(\frac{a}{d}, \frac{a}{R}, \frac{H}{R}\right). \quad (18)$$

Az új Φ függvény tehát csak a méretarányoktól függ. Felhasználva a (15) definíciókat:

$$\frac{\Delta h}{d} = \frac{\Omega^2 a^2 d}{\nu \sqrt{gR}} \Phi\left(\frac{a}{d}, \frac{a}{R}, \frac{H}{R}\right). \quad (19)$$

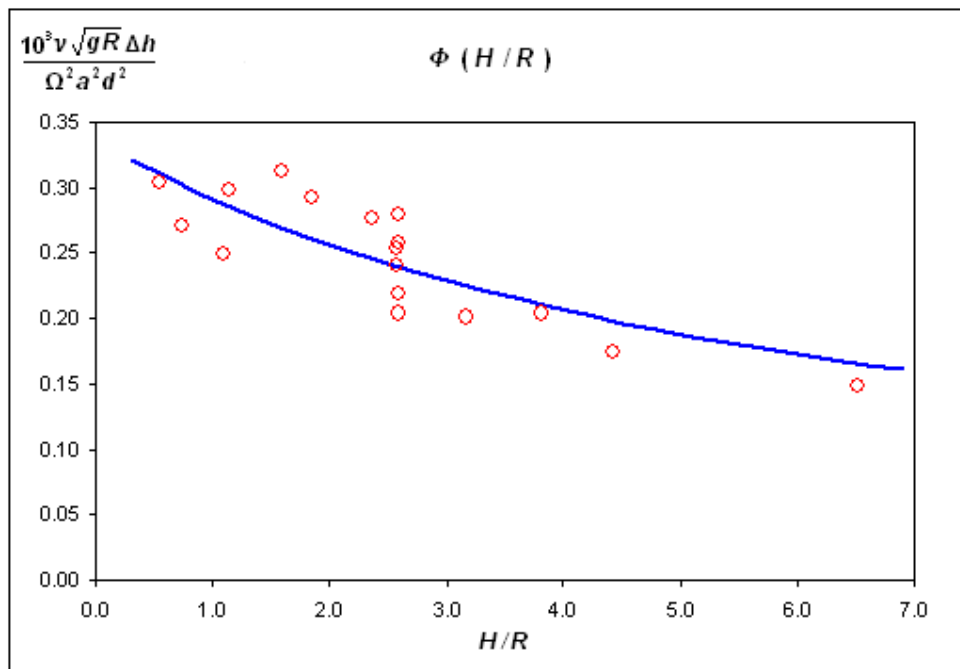
A mérési eredményeim további vizsgálata azt mutatja, hogy a tölcser magassága nagyjából a négyzetével növekszik, míg megfelelően széles edényekben ($R > 0.4H$) az R sugár négyzetgyökével való fordított arányosság is kimutatható. Adódik tehát, hogy a Φ függvény nem függ sem az a/d , sem az a/R hányadostól:

$$\frac{\Delta h}{d} = \frac{\Omega^2 a^2 d}{v \sqrt{gR}} \Phi\left(\frac{H}{R}\right). \quad (20)$$

A (18) egyenletet átrendezve:

$$\Phi\left(\frac{H}{R}\right) = \frac{v \sqrt{gR} \Delta h}{\Omega^2 a^2 d^2}. \quad (21)$$

A mérési eredmények alapján (21) jobb oldalát H/R szerint ábrázolva a Φ függvény grafikususan meghatározható (28. ábra). Az átláthatóság növelése érdekében átlagolva tüntettem fel azokat az adatokat, melyek csak a keverőfej szögsebességében különböznek, ezek a (7) képlet alapján úgyis egymás „közelébe” kerülnének. Látható, hogy a tölcsermagasság enyhén, de szisztematikusan függ a H feltöltési magasságtól.



28. ábra: A $\Phi(H/R)$ skálafüggvény grafikus meghatározása a mért Δh értékek alapján; a piros körök az ebből adódó értékek, a kék görbe pedig a rájuk illesztett hiperbola – a $H/R = 2.5$ közelében torlódó pontok különböző keverőfejekkel való méréseket jelölnek

A grafikon pontjaira a következő képlettel megadott hiperbola illesztethető:

$$\Phi(x) = \frac{\alpha}{x+k}. \quad (22)$$

A paraméterek (α , k) legmegfelelőbb értékei:

$$\alpha = (2,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}; \quad (23)$$

$$k = 6,3 \pm 1,7. \quad (24)$$

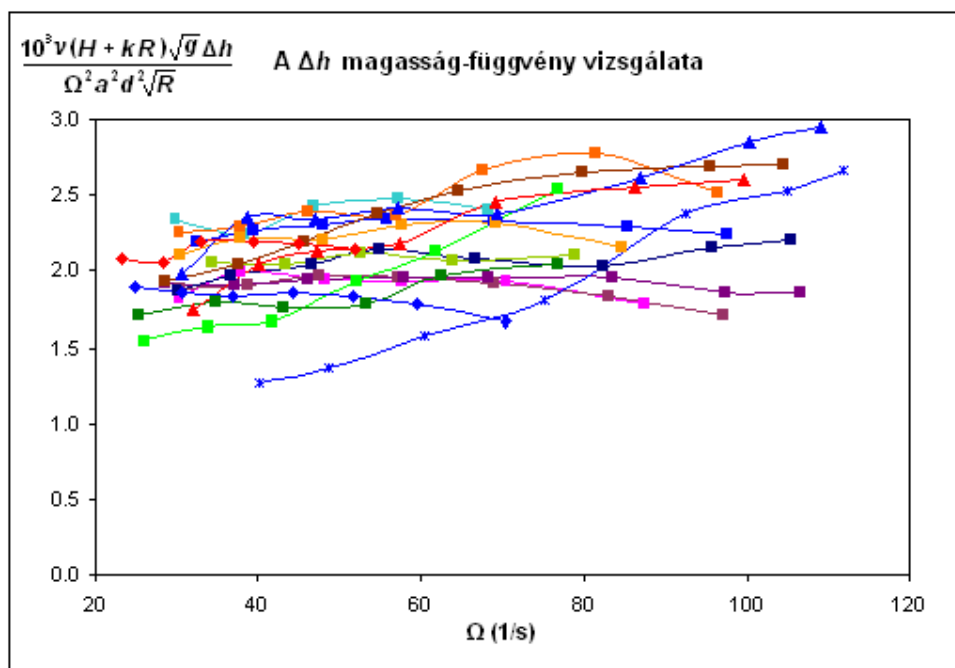
A Φ függvényre kapott (22) kifejezést a (20) képletbe beírva:

$$\frac{\Delta h}{d} = \frac{\Omega^2 a^2 d}{v \sqrt{gR}} \cdot \frac{\alpha R}{H + kR}. \quad (25)$$

Ebből a Δh tölcsérmagasság függvénye:

$$\Delta h = \alpha \frac{\Omega^2 a^2 d^2 \sqrt{R}}{v(H + kR)\sqrt{g}}. \quad (26)$$

A kapott összefüggés ellenőrzéséhez ábrázoltam a (26)-ból kifejezett α együtthatót az Ω szögsebesség függvényében (29. ábra).



29. ábra: A (26) tölcsérmagasság-függvény helyességének grafikus igazolása (jelkulcs: 3. táblázat)

A mérési pontok túlnyomó része valóban a (23) által meghatározott sávba esik; az előző fejezetben található 14. ábrával összehasonlítva az adatok figyelemre méltó összeesését láthatjuk. Eltéréseket főleg a nagyobb szögsebességek esetén lehet megfigyelni, ha ugyanis a tölcsér alja a keverőfej közvetlen közelébe ér, akkor már az Ω -val való négyzetes függés sem teljesül pontosan. Különösen furcsa a legkisebb keverővel ($a = 1,25$ cm, $d = 0,75$ cm) mért adatsor (kék csillag), mely a szögsebesség legkisebb értékeinél sem viselkedik „normálisan”. Még a hibákkal együtt is meglepő azonban, hogy az egyszerű (26) összefüggés mennyire pontosan alkalmazható egy ilyen bonyolult rendszerre.

2. A tölcser félszélességének függvénye

Dimenzió-analízis segítségével a tölcser b félszélességére is nyerhető egy hasonló összefüggés. A b / d hányados mértékegység nélküli, így a többi dimenziómentes paraméter valamilyen q függvényeként írható fel:

$$\frac{b}{d} = q(Re, Fr, \frac{a}{d}, \frac{a}{R}, \frac{H}{R}). \quad (27)$$

Az előző fejezet alapján a félszélesség független a szögsebességtől (15. ábra), ekkor viszont a q függvényben (15) szerint csak a Reynolds- és a Froude-szám hányadosa szerepelhet. A félszélesség biztosan növekszik a ν viszkozitással, hiszen ideális folyadékban ideális örvényt kapnánk, melynek szélessége nyilvánvalóan zérus. A Froude-számot kell tehát a Reynolds-számmal osztani:

$$\frac{b}{d} = \frac{Fr}{Re} \Psi(\frac{a}{d}, \frac{a}{R}, \frac{H}{R}). \quad (28)$$

A bevezetett Ψ szintén egy dimenzió nélküli függvény. A Reynolds- és a Froude-számok (15) definícióit behelyettesítve:

$$\frac{b}{d} = \frac{d\nu}{a^2 \sqrt{gR}} \Psi(\frac{a}{d}, \frac{a}{R}, \frac{H}{R}). \quad (29)$$

A mérési eredményeim szerint a b félszélesség lényegében független a H feltöltési magasságtól, az R sugár négyzetgyökével pedig fordítottan arányos. Ez alapján a Ψ függvény argumentuma jelentősen egyszerűsödik:

$$\frac{b}{d} = \frac{d\nu}{a^2 \sqrt{gR}} \Psi(\frac{a}{d}). \quad (30)$$

Mivel a keverőfej a sugarától első közelítésben lineárisan függ a félszélesség:

$$\Psi(x) = \beta x^3. \quad (31)$$

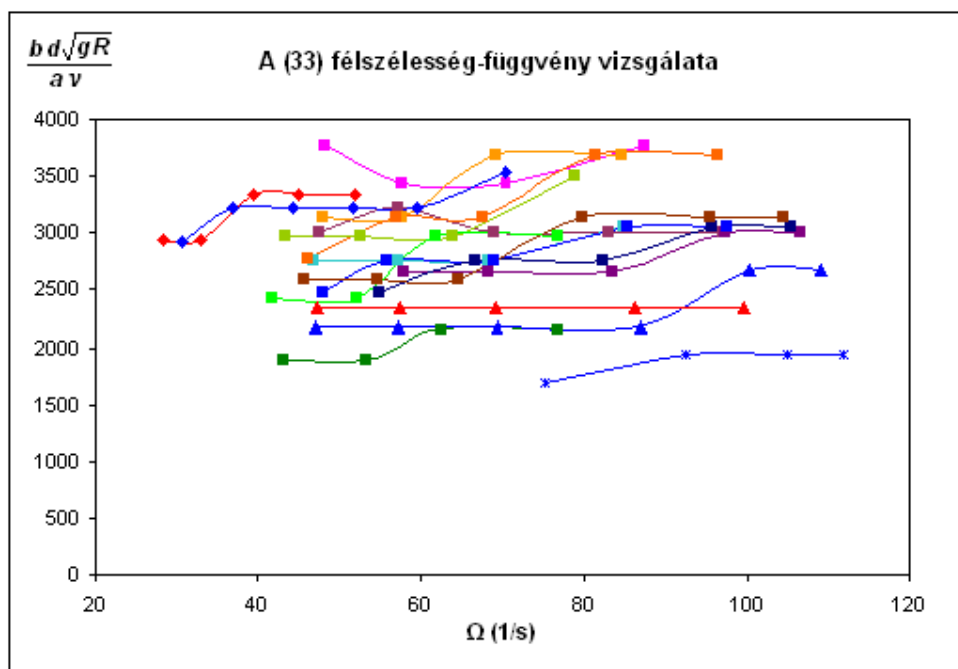
A legmegfelelőbb β együttható értéke:

$$\beta = (2.8 \pm 0.8) \cdot 10^3. \quad (32)$$

A (30) és (31) képletek alapján a b félszélesség függvénye egyszerűen adódik:

$$b = \beta \frac{a\nu}{d \sqrt{gR}}. \quad (33)$$

A grafikus szemléltetéshez ennek egy átrendezett alakját használom (30. ábra).



30. ábra: A (33) félszélesség-függvény pontosságának grafikus vizsgálata (jelkulcs: 3. táblázat)

Az előző fejezet 15. ábrájával összevetve itt is megfigyelhető az adatok összeesése, a szórás azonban nagyobb, mint a tölcsermagasság esetén. Ez nem meglepő, hiszen a félszélesség leolvasása sokkal pontatlanabb volt a magasságénál, így az adatok több mérési hibát tartalmaznak.

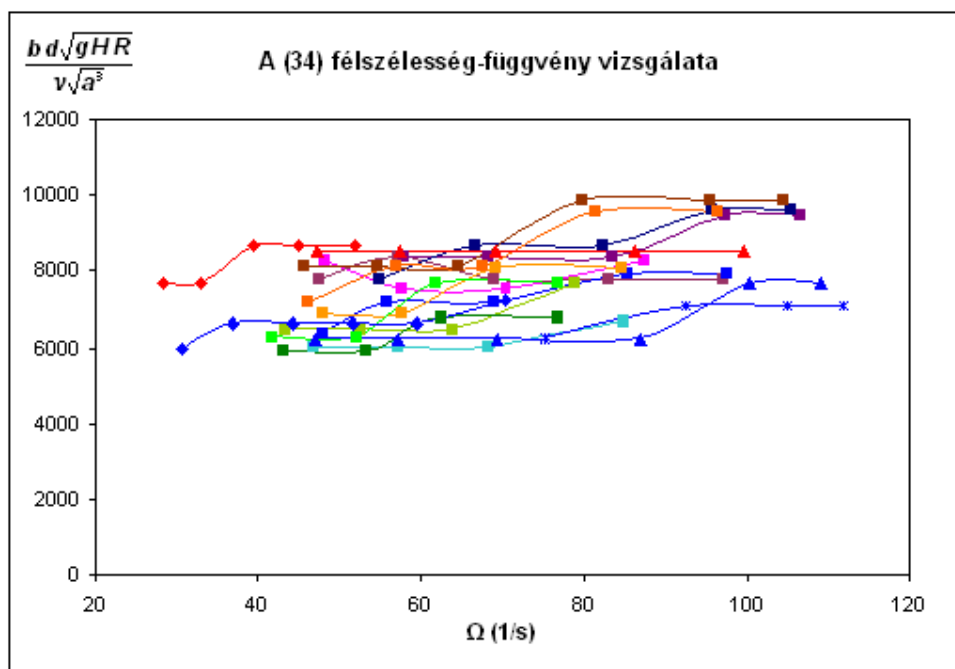
Az adatok szórását meglepő módon csökkentti, ha a (33) összefüggés helyett az alábbi kifejezést használjuk:

$$b = \gamma \frac{v\sqrt{a^3}}{d\sqrt{gHR}}. \quad (34)$$

Ekkor tehát a b félszélesség nem független a H feltöltési magasságtól, és az a sugárral való egyenes arányosság sem teljesül. A mérési eredmények ismeretében a dimenziómentes γ együttható értéke meghatározható:

$$\gamma = (7.6 \pm 1.4) \cdot 10^3. \quad (35)$$

A 31. ábrán a (34)-ből kifejezett γ állandó látható az Ω szögsebesség függvényében.



31. ábra: A (34) félszélesség-függvény pontosságának grafikus szemléltetése (jelkulcs: 3. táblázat)

A mérési pontok rendkívüli összeesést mutatnak, még a 30. ábrához képest is. A (33) összefüggés érvényességét sem lehet azonban kizárni, mert a rá jellemző β együttható hibája nem haladja meg a félszélesség leolvasásának pontatlanságát (20-30%). A továbbiakban ezért a b félszélesség egyszerűbb (33) képletét használom.

3. A Burgers-örvénymodell alkalmazása

Az előző fejezet eredményei szerint a tölcser alatt lefelé áramlás valósul meg, melynek folyamatos „vízellátásáról” a környező beáramlás gondoskodik; ez a II. fejezetben látott Burgers-örvénymodellre emlékeztet. A látott kép mégsem felel meg pontosan az ott leírtak, hiszen a leáramlás sebessége erősen távolságfüggő, a radiális áramlás pedig a magassággal változik. Ennek ellenére megkísérlem a magasságra és a szélességre kapott függvényeket a Burgers-modell egy változata alapján értelmezni.

Belátható, hogy a (3) képletek által definiált Burgers-örvény semmiképpen nem alkalmazható, a vízfelszínre jellemző határfeltételeket ugyanis nem tudja kielégíteni. A (3) képletek kitüntetik a $z = 0$ síkot, ahol az axiális áramlás sebessége zérus. Fontos hangsúlyozni, hogy ez nem egyezik meg az $V/2$. pontban felvett $z = 0$ síkkal, az ugyanis ott definíció szerint az edény alját jelentette. Most viszont a síkot az előbbi feltétel alapján választjuk. A tengelytől elég távol a víz felülete vízszintes, ebből következik, hogy az axiális sebesség eltűnik. A felszín tehát $r \rightarrow \infty$ esetén a Burgers-örvény $z = 0$ síkjához tart. Hasonló okból viszont a tölcser aljánál sem lehet axiális sebesség; ez ellentmond a $z < 0$ magasságból (3) alapján következő véges értékkel.

Az axiális sebesség (3) kifejezéséhez egy megfelelő $v_0(r)$ függvényt hozzáadva teljesíthető az a peremfeltétel, hogy a sebesség vízfelszínre merőleges komponense mindenhol tűnjön el. Magáról a függvényről semmit nem tudunk, leszámítva, hogy $r \rightarrow \infty$ esetén $v_0(r) \rightarrow 0$. Többre azonban a továbbiakhoz nincs is szükség.

A módosított Burgers-örvényben tehát az alábbi összefüggések adják meg a sebesség axiális, radiális és tangenciális komponenseit:

$$v_z(r, z) = \frac{4\nu}{c^2} z + v_0(r); \quad (36)$$

$$v_r(r) = -\frac{2\nu}{c^2} r; \quad (37)$$

$$v_t(r) = \frac{C}{r} (1 - \exp(-\frac{r^2}{c^2})). \quad (38)$$

A tölcsér körül létrejövő áramlási teret így a (36-38) képletekkel közelítem. Fontos kiemelni, hogy csak az edény középső részére koncentrálnunk, a külső feláramlás vagy a keverőfej körüli kifelé áramlás semmiképpen nem tartozik ebbe a tartományba.

A tengelytől tetszőleges r távolságban ismert a – magasságtól független – tangenciális sebesség értéke. Ebből a vízfelszín meredeksége bármelyik pontban kiszámítható [3]. Képzeljünk el két kis elmozdulást, egy Δr -t kifelé, majd egy Δz -t felfelé. Ha ekkor a vízfelszín egy pontjából egy másikba jutunk, a nyomás eredő megváltozása zérus:

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z = 0. \quad (39)$$

A függőleges irányú nyomásváltozás a nehézségi erőnek, a sugárirányú pedig a „centrifugális erőnek” köszönhető, melyek a folyadék részecskéire hatnak:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_t^2}{r}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (40)$$

Az egyenletekben szereplő ρ a folyadék állandó sűrűségét jelöli. (39) és (40) alapján:

$$\rho \frac{v_t^2}{r} \Delta r = \rho g \Delta z. \quad (41)$$

Határozza meg a vízfelszín pontjait a $z = y(r) < 0$ függvény. Ennek deriváltja:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{v_t^2}{rg}. \quad (42)$$

A (38) tangenciális sebesség behelyettesítése után a Δh tölcsérmagasság integrálással kiszámítható:

$$\Delta h = \int_0^{R'} \frac{C^2}{r^3 g} (1 - \exp(-\frac{r^2}{c^2}))^2 dr. \quad (43)$$

Az $R' < R$ távolság a modell értelmezési tartományának sugara, ami általában elég nagy ($R' \gg c$). Ezért képezhetjük az $R' \rightarrow \infty$ határátmenetet, ekkor az integrál értéke:

$$\Delta h = \ln(2) \frac{C^2}{c^2 g}. \quad (44)$$

A (43) integrálást 0-tól c -ig elvégezve nagyjából a (44) érték felét kapjuk. Ez alapján mondhatjuk, hogy a félszélesség lényegében az örvénymag c sugarával egyezik meg:

$$b \approx c. \quad (45)$$

A tölcsér magasságának (44) és félszélességének (45) kifejezéseit a mérésből kapott (24) és (31) képletekkel egyenlővé téve:

$$\ln(2) \frac{C^2}{c^2 g} = \alpha \frac{\Omega^2 a^2 d^2 \sqrt{R}}{\nu(H + kR)\sqrt{g}}; \quad (46)$$

$$c = \beta \frac{a\nu}{d\sqrt{gR}}. \quad (47)$$

Ezt arra használhatjuk, hogy a Burgers-örvény paramétereit a rendszerünkre jellemző mérhető mennyiségekkel fejezzük ki. Az örvényerősség négyzete például (46) és (47) segítségével kifejezhető:

$$C^2 = \alpha\beta^2 \frac{\Omega^2 a^4 \nu}{\ln(2)(H + kR)\sqrt{gR}}. \quad (48)$$

Leolvasható, hogy az örvényerősség egyenesen arányos a keverőfej szögsebességével:

$$C = A\Omega. \quad (49)$$

Utólag tehát igazolást nyert a Reynolds- és Froude-számok bevezetésekor használt $u \sim \Omega$ feltevés. Az A együttható a paraméterek elég bonyolult függvénye:

$$A = a^2 \sqrt{\frac{\alpha\beta^2 \nu}{\ln(2)(H + kR)\sqrt{gR}}}. \quad (50)$$

A PIV eljárással vizsgált áramlás adataival ($R = 22,4$ cm, $H = 16,8$ cm, $a = 2,5$ cm):

$$A = 0,63 \text{ cm}^2. \quad (51)$$

A b félszélességet (33) helyett (34)-gyel számolva lényegében ugyanezt kapnánk. Ez az érték az alkalmazott közelítések durvaságához képest igen jó egyezést mutat a PIV felvételekből kapott (11)-gyel.

A modell alapján az örvénymag c sugarából a tölcsér alatti leáramlás sebességére is következtethetünk. A (36) és (47) képletek szerint az axiális sebesség értéke a felszíntől z távolságban:

$$v_z = \frac{4d^2 gR}{\beta^2 a^2 \nu} z + v_0(r). \quad (52)$$

A tengelytől elég távol $v_0(r)$ eltűnik, lehetővé téve tipikus értékek behelyettesítését ($R = 10$ cm, $a = 2,5$ cm, $d = 1$ cm, $z = 10$ cm):

$$v_z = 0,81 \text{ cm/s}. \quad (53)$$

Állandó leáramlásról nem beszélhetünk, így (53) valamilyen átlagos sebességet jelöl. Különös, hogy (52) szerint ez nem függ az Ω szögsebességtől. Talán inkább alulbecsli a valóságot, a modell durvaságához mérten azonban jól adja meg az átlagos leáramlási sebesség nagyságrendjét.

VII. Konklúzió

Az előző fejezetekben részletesen megvizsgáltam a laboratóriumi tornádómodellt, feltérképeztem az edényben létrejövő áramlási képet. Most rátérek a tornádóval való összehasonlításra, megadva a legfontosabb analógiákat és eltéréseket.

A 3. ábrán látott jellegzetes tölcsér a tornádók legszemetűnőbb jele; felső része a felhő anyagából, míg alsó fele inkább a felkapott porból és törmelékből áll. Néha ezek a részek elkülönülnek egymástól, ilyen tornádókat láthatunk a 32. és a 33. ábrán.



32. ábra: Tornádó Kansas felett, 2004
(<http://www.oklahomalightning.com>)



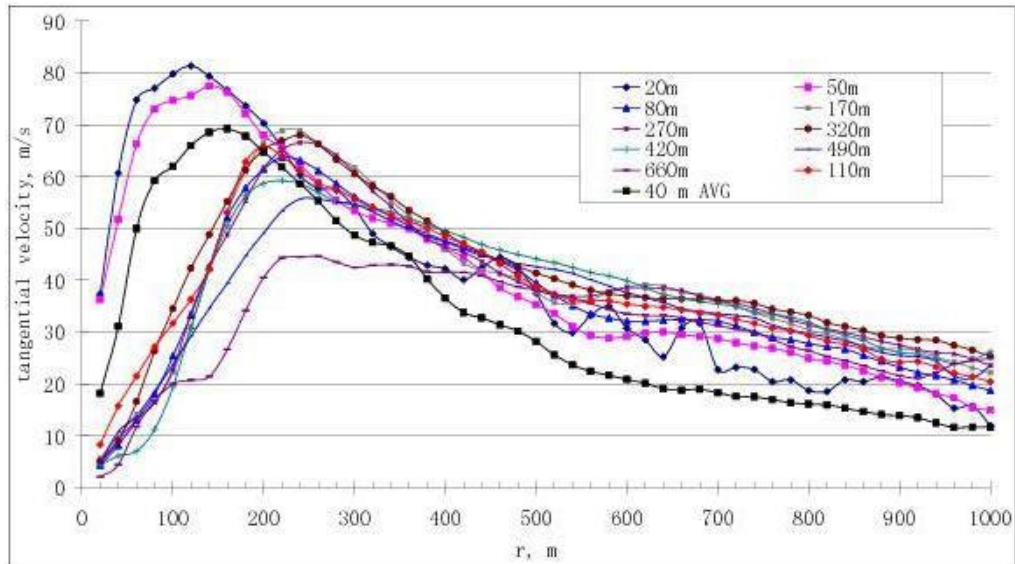
33. ábra: Tornádó Oklahoma felett, 2004
(<http://www.oklahomalightning.com>)

A fenti képek alapján nem nehéz felismerni az analógiát a tornádó és modellje közt; a felhő „kitüremkedése” a vízfelszín „behorpadásához” hasonlít, míg a portölcsér a festés hatására létrejövő festékfüggönynek felel meg. Szép hasonlóság ez, annak ellenére, hogy a tornádótölcsér két „része” általában összemosódik.

A modellben és a tornádóban is megfigyelhető középen egy erős leáramlás (4. ábra). Körülötte, a festékfüggöny ill. a portölcsér területén viszonylag kicsi az axiális sebesség, ennek köszönhető igen nagy stabilitásuk. A neutrális rétegek azonban mégis különböznek egymástól, a tornádóban itt az axiális sebesség előjelet vált, a modellben viszont csak lokális minimuma van. Ezen kívül már gyökeresen eltér a két axiális áramlás, a tornádótölcsér körül rögtön feláramlás történik, a modell esetében viszont a függönyön kívül is lefelé áramlás látható. A keverőfej által kidobott víztömeg csak a fal hatására indul felfelé, egy végtelen nagy edényben sehol nem jönne létre feláramlás.

A radiális áramlás tekintetében szinte semmilyen hasonlóságot nem fedezhetünk fel. A tornádó tölcsérének alján látható ugyan egy gyenge kiáramlás (4. ábra), kifelé haladva azonban ez is előjelet vált. A keverőfej által létrehozott nagy sebességű kiáramlásnak nincs „párja” a tornádóban. Feljebb teljesen ellentétes a radiális áramlás, a modellben mindenhol beáramlás történik, a tornádónál viszont itt monoton kifelé áramlást látunk.

Radaros technikával közvetlenül mérhető a tornádó áramlásának tangenciális komponense a magasság és a tengelytől való távolság függvényében [6-9]. A 34. ábra egy ilyen mérés eredményét mutatja, az adatokat 1998-ban vették fel egy dél-dakotai tornádó alapján.



34. ábra: Tangenciális szélsébség egy tornádóban [6] – az egyes görbék különböző magasságokat jelölnek

A legkisebb magasságok kivételével a 34. ábra grafikonjai jól illeszkednek egymáshoz, úgy tűnik, a tangenciális sebesség lényegében független a magasságtól. A görbék elég nagy távolságban C/r alakú hiperbolával közelíthetők, összességükben pedig a Burgers-örvény tangenciális sebességprofiljára emlékeztetnek (6. ábra). A VI. fejezet alapján a Burgers-örvény a modell áramlási képre egészen jól alkalmazható, így feltételezhetjük, hogy az edényben kialakuló áramlás tangenciális komponense is a Burgers-örvényével közelíthető. Nagy távolságban ráadásul a Burgers-örvény tangenciális sebessége az ideális örvényéhez tart, ezt közvetlenül is megfigyelhettük az $V/2$. pontban. Megállapíthatjuk tehát, hogy a tangenciális sebesség tekintetében jó egyezést látunk a tornádó és modellje közt; márpedig éppen ez a komponens adja a szélsébség domináns részét.

VIII. Összefoglalás

Dolgozatom utolsó fejezetében röviden összefoglalom a mérési eredményeket és a belőlük levont legfontosabb következtetéseket.

A mágneses keverő által keltett örvény vizsgálatára a következő, egymást jól kiegészítő mérési eljárásokat használtam:

- a szabad felszínen kialakuló tölcsér méreteinek szabad szemmel történő leolvasása,
- víznél könnyebb gyöngyök követése az áramlásban,
- festék követése az áramlásban,
- sebességtér felvétele PIV módszerrel.

A PIV eljárás segítségével az edény legalja és egy belső tartomány kivételével mindenhol megkaptam a tangenciális, radiális és axiális áramlási sebességet a koordináták függvényében. A mérések alapján mindhárom sebességkomponens egyenesen arányos a keverőfej Ω szögsebességével. A tangenciális áramlás a mérhető tartományban lényegében független a magasságtól és fordítottan arányos a sugárral; egy olyan ideális örvényével egyezik meg, melynek örvényerőssége arányos Ω -val. A radiális sebesség viszont jelentősen változik a magassággal, felül beáramlás, alul pedig kiáramlás történik. A radiális komponensből számolt axiális áramlás sokkal inkább a sugártól függ, belül leáramlást, egy 4-5 cm széles külső gyűrűben viszont elég erős feláramlást látunk.

Más módszerekkel felderítettem a PIV eljárás számára „láthatatlan” részek áramlását is. Festéssel igazoltam például az edény alján, a keverőfej körül létrejövő rendkívül erős kiáramlást. A gyöngyökkel történő nyomkövetésből kiderült, hogy az edény tengelyében egy elég erős leáramlás alakul ki, itt a víznél könnyebb gyöngyök többé-kevésbé stabil egyensúlyi helyzetbe kerülnek. Ezt az áramlási fonalat (melynek sugara milliméteres nagyságrendű) egy lassú áramlású zóna övezi, melyet festék befecskendezése esetén egy stabil, henger alakú festékfüggöny rajzol ki. A lefelé áramlásnak itt lokális minimuma van, az axiális sebesség értéke közel zérus.

A keverés hatására létrejövő tölcsér méreteit a paraméterek különböző értékei mellett mértem. Azt találtam, hogy a tölcsér Δh magasságát a (26), b félszélességét pedig a (33) és (34) képletek mérési hibán belüli pontossággal írják le. A tölcsérmagasság tehát arányos a szögsebesség és a keverőfej sugarának négyzetével, az edény méreteitől pedig gyengébben függ. A félszélesség lényegében független a szögsebességtől, lineárisan növekszik a keverőfej sugarával, továbbá fordítottan arányos az edény sugarának négyzetgyökével.

A tornádó és az általam vizsgált kísérleti modell összehasonlításából kiderül, hogy a két rendszer tangenciális sebessége hasonló függvénye a koordinátáknak, a Burgers-örvény tangenciális komponenséhez hasonlít. A radiális és az axiális áramlási kép viszont gyökeresen eltér, hasonlóságként csak a központi erős leáramlás említhető meg. A víz „behorpadásával” létrejövő tölcsér és a festékfüggöny együttesen felel meg a hatalmas tornádótölcsérnek, ez a két rendszer legszembevetőbb analógiája.

Irodalomjegyzék

- [1] L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika, VI. Hidrodinamika; Tankönyvkiadó, Budapest, 1980
- [2] H. J. Lugt: Vortex Flow in Nature and Technology; John Wiley and Sons Inc., 1983
- [3] B. Lautrup: Continuum Physics, Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic World, Chapter 21: Whirls and Vortices – <http://www.cns.gatech.edu/PHYS-4421/Whirls.ps>
- [4] A. Andersen, T. Bohr, B. Stenum, J. J. Rasmussen, B. Lautrup: Anatomy of a Bathtub Vortex; Physical Review Letters, 2003, Volume 91, Number 10
- [5] Homepage of Dantec Dynamics, Principles of Particle Image Velocimetry – <http://www.dantecmt.com/PIV/Princip/Index.html>
- [6] P. Sarkar, F. Haan, W. Gallus Jr., K. Le, J. Wurman: Velocity Measurements in a Laboratory Tornado Simulator and their Comparison with Numerical and Full-Scale Data – <http://www.pwri.go.jp/eng/ujnr/joint/37/paper/42sarkar.pdf>
- [7] P. P. Sarkar, F. L. Haan Jr.: Next Generation Wind Tunnels for Simulation of Straight-Line, Thunderstorm- and Tornado-Like Winds – <http://www.pwri.go.jp/jpn/research/kaigai/ujnr/joint/34/paper/34sarkar.pdf>
- [8] R. A. Brown, V. T. Wood: Comparisons of Doppler Velocity Tornadic Vortex Signatures with Signatures from Model Vortices – <http://ams.confex.com/ams/pdfpapers/81573.pdf>
- [9] J. E. Caskey Jr: Wind Speed and Air Flow Patterns in the Dallas Tornado of April 2, 1957; Monthly Weather Review, 1960, Volume 88, Number 5

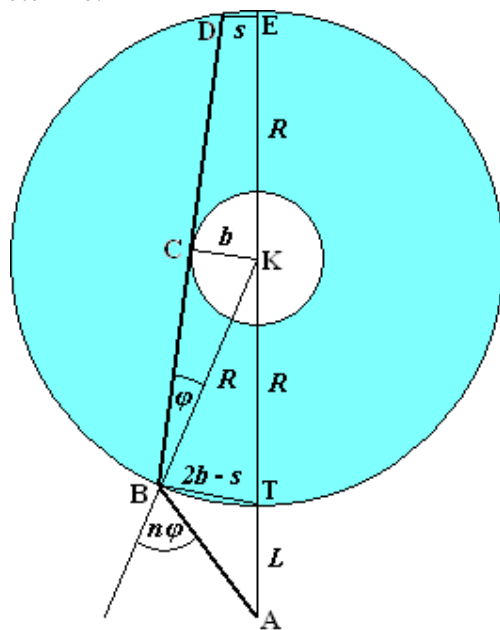
Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőimnek, Dr. Jánosi Imrének, Dr. Szabó Gábornak és Dr. Tél Tamásnak; folyamatos segítségük és útmutatásuk nélkül nem tudtam volna elkészíteni dolgozatomat. Továbbá köszönettel tartozom Gyüre Balázsnak, különös tekintettel a PIV felvételek numerikus kiértékelésében nyújtott segítségére.

Függelék

1. A félszélesség meghatározása méréssel

A félszélesség leolvasása – mint azt már a IV/2. pontban említettem – nem könnyű feladat. Külön problémát okoz, hogy a közvetlenül mérhető s távolság nem egyezik meg a b félszélességgel (35. ábra). Az alábbiakban a két mennyiség közti összefüggést vezetem le.



35. ábra: A b félszélesség kiszámításához használt képzeletbeli fénysugár útja (vastag vonal) – az edény hátsó falán elhelyezett vonalzóval s olvasható le; a megfigyelő szeme az A pontban található

Tegyük fel, hogy a 35. ábrán látható φ beesési szög elég kicsi, ekkor a szöget a szinuszával közelíthetjük:

$$\varphi \approx \sin(\varphi) = \frac{b}{R}. \quad (54)$$

Ugyanezért egyszerűsödik a Snellius–Descartes-törvény is, jóval egyszerűbbé téve a törési szög értékének meghatározását:

$$n\varphi \approx \frac{nb}{R}. \quad (55)$$

Az n szám természetesen a víz törésmutatóját jelöli. Még mindig a $\varphi \ll 1$ feltételt használjuk, mikor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazzuk három egyébként csak közel párhuzamos szakaszra (DE, CK és BT):

$$BT = CK + (CK - DE) = 2b - s. \quad (56)$$

Hasonló közelítést használunk a következő képletek felírásakor is:

$$BT = AT \cdot \text{BAT} \angle; \quad (57)$$

$$BT = KT \cdot \text{BKT} \angle. \quad (58)$$

A 35. ábra alapján az előbbi két szög összege is megadható:

$$BAT\angle + BKT\angle = n\varphi. \quad (59)$$

Behelyettesítve az (57) és (58) összefüggéseket:

$$BT \cdot \frac{AT + KT}{AT \cdot KT} = n\varphi. \quad (60)$$

Felhasználva a fenti távolságok ismert értékeit (35. ábra) és az (55) képletet:

$$(2b - s) \frac{L + R}{LR} = \frac{nb}{R}. \quad (61)$$

Átrendezéssel adódik a b félszélesség értéke:

$$b = \frac{(L + R)s}{2R + (2 - n)L}. \quad (62)$$

Az edény R sugarát és a víz n törésmutatóját nagy pontossággal tudjuk. A félszélesség leolvasásához mindig nagyon közel hajoltam az edény falához, majd az $L = 5$ cm közelítő értékkel számoltam; ennek bizonytalansága tovább növeli a b félszélesség hibáját. Az (54) összefüggés alapján ellenőrizhetjük a közelítések alkalmazásához kulcsfontosságú φ szög kicsiségét. A legkisebb sugarú ($R = 3,8$ cm) edényben mértem a legnagyobb félszélességeket ($b = 1,7$ cm), nyilvánvalóan ekkor adódik a legnagyobb φ érték. A szög és szinusza közötti eltérés azonban még így is csak 5% körüli hibát okoz, mely az s távolság leolvasási pontatlanságához képest elhanyagolható.

2. Az „anti-centrifugális erő” levezetése

Az V/3. pontban láttuk, hogy a gyöngyök mozgásában fontos szerepet játszik az „anti-centrifugális erő” – ez forgó folyadékokban hat, a forgástengely felé sodorva a folyadékknál kisebb sűrűségű testeket.

Vizsgáljunk egy kicsiny ΔV térfogatú, ρ sűrűségű testet, mely az ω szögsebességgel forgó folyadékban sodródik. Hengerkoordináták (r , φ , z) használata esetén a test mozgásegyenletének sugárirányú komponense:

$$\rho\Delta V(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_k + F_f. \quad (63)$$

Az egyenlet bal oldala a $\rho\Delta V$ tömegű test radiális gyorsulása, míg a jobb oldalon két erő látható: F_k a relatív sebességgel arányos közegellenállás megfelelő komponense, az F_f erőt pedig a folyadék forgásából származó nyomáskülönbségek hozzák létre. Ennek meghatározásához cseréljük ki a testet a ρ_0 sűrűségű folyadék egy ΔV térfogatú darabjára, mely a környezetével együtt ω szögsebességgel forog. A közegellenállási erő ekkor zérus, továbbá $\ddot{r} = 0$ és $\dot{\varphi} = \omega$, a környező részek eltérő nyomásából származó F_f erő viszont nem változik.

$$F_f = -\rho_0 r \omega^2 \Delta V. \quad (64)$$

Ezt a (63) egyenletbe behelyettesítve:

$$\rho\Delta V(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_k - \rho_0 r \omega^2 \Delta V. \quad (65)$$

Ha a test elég jól együtt sodródik a folyadékkal, felhasználhatjuk, hogy $\dot{\phi} \approx \omega$. Ekkor a (65) összefüggés átrendezett alakja:

$$\rho \Delta V \cdot \ddot{r} = F_k + (\rho - \rho_0) \Delta V \cdot r \omega^2. \quad (66)$$

Látható, hogy a forgó folyadék koordináta-rendszeréből nézve a test sugárirányú mozgását három erő határozza meg. A közegellenállás mellett szerepet kap a forgó rendszerekben általánosan fellépő „centrifugális erő”, valamint egy harmadik erő, mely a folyadék nyomásának kifelé történő növekedéséből származik. Az utóbbi kettő eredője $\rho < \rho_0$ esetén befelé mutat, ekkor nevezhetjük „anti-centrifugális” erőnek.

3. A gyöngyök egyensúlyának stabilitása

A mérési eredmények szerint a gyöngyök stabil egyensúlyi helyzetbe kerülhetnek a tölcsér alatt. A vízszintes stabilitás az előző függelékben vizsgált „anti-centrifugális” erőnek köszönhető, mely kis kitérések esetén a gyöngyöket visszasodorja. A függőleges stabilitás feltétele viszont az alábbi levezetés tárgyát képezi.

Az egyensúlyi állapot az edény tengelyében jön létre, ahol szimmetriaokok miatt minden erő és sebesség függőleges irányú. Ebből következik, hogy egydimenziós problémával állunk szemben. Három erő hat a gyöngyre; a tömegvonzás és a felhajtóerő nyilván nem függ a z magasságtól, az F_k közegellenállás viszont felfelé haladva a sebességek változása által növekedhet és csökkenhet is. A felfelé mutató erőket pozitívnak véve utóbbi esetben jutunk stabil egyensúlyhoz, hiszen egy felfelé történő elmozdulás esetén ekkor az eredő erő lefelé mutat. A stabilitás feltétele tehát:

$$\frac{dF_k}{dz} < 0. \quad (67)$$

Mint már említettem, az F_k erő tulajdonképpen a v_z axiális sebesség függvénye, ahol a v_z viszont a z magasságtól függ. Ezért a (67) összefüggésre alkalmazhatjuk a közvetett deriválás szabályát:

$$\frac{dF_k(v_z)}{dv_z} \cdot \frac{dv_z(z)}{dz} < 0. \quad (68)$$

A közegellenállásról annyit biztosan tudunk hogy a v_z axiális sebesség szigorúan monoton növekvő függvénye:

$$\frac{dF_k(v_z)}{dv_z} > 0. \quad (69)$$

A (68) és (69) egyenlőtlenségek összevetésével:

$$\frac{dv_z(z)}{dz} < 0. \quad (70)$$

A (70) összefüggés pedig megfelel annak, amit az V/3. pontban állítottam. Ha ugyanis lefelé mozdulunk el, az axiális sebesség „pozitívabb” lesz; a – negatív előjelű – lefelé áramlás abszolút értékben csökken.